

〔Ⅰ〕

(1)

$\overrightarrow{OA} = (1, 2, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (1, 0, 1)$ であるから,

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} \\ &= \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{\sqrt{10}}$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH} &= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} \\ &= s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \\ &= (s, 2s, 0) + (t, 0, t) - (-5, 4, 2) \\ &= (s+t+5, 2s-4, t-2)\end{aligned}$$

である。ここで、 $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ であるから,

$$\begin{aligned}&\begin{cases} \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \\ \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (s+t+5, 2s-4, t-2) \cdot (1, 2, 0) = 0 \\ (s+t+5, 2s-4, t-2) \cdot (1, 0, 1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5s+t-3=0 \\ s+2t+3=0 \end{cases} \\ &\therefore (s, t) = (1, -2)\end{aligned}$$

となる。

(答) $(s, t) = (1, -2)$

(3)

$\triangle OAB$ の面積を S とおくと,

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{5 \cdot 2 - 1^2} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

である。 $\triangle OAB$ を四面体の底面と見ると、この四面体の高さは CH の長さに等しい。これを求めると,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH} &= (4, -2, -4) \\ |\overrightarrow{CH}| &= \sqrt{16 + 4 + 16} \\ &= 6\end{aligned}$$

である。したがって、求める四面体の体積は,

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot 6 = 3$$

である。

(答) 3

〔Ⅱ〕

〔解答〕

$$\textcircled{1} \quad \frac{\pi}{3} \quad \textcircled{2} \quad \frac{\pi}{6} \quad \textcircled{3} \quad \frac{1+\cos 2\theta}{2} \quad \textcircled{4} \quad \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}} \quad \textcircled{5} \quad \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-2}} \quad \textcircled{6} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

〔解説〕

(1)

$$a_1 = \frac{1}{2} = \cos \theta_1 \text{ と } 0 \leq \theta_1 < \frac{\pi}{2} \text{ より,}$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{であり, } a_2 = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \theta_2 \text{ と } 0 \leq \theta_2 < \frac{\pi}{2} \text{ より,}$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{6}$$

である。

(2)

倍角の公式より

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

である。よって $a_n = \cos \theta$, $a_{n-1} = \cos 2\theta$ とすると, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, すなわち $0 \leq \cos \theta$ のとき,

$$a_n = \sqrt{\frac{1 + a_{n-1}}{2}}$$

が成り立つから, $a_1 = \cos \frac{\pi}{3}$ であることと合わせて,

$$a_n = \cos \left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}} \right)$$

と推測でき, 数学的帰納法により, この推測が正しいことが証明できる。

ここで, $\theta_n = \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}$ とおくと

$$\begin{aligned} 2 \cos \theta_n \sin \theta_n &= \sin 2\theta_n \\ &= \sin \left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-2}} \right) \\ &= \sin \theta_{n-1} \end{aligned}$$

であるから, これを繰り返すと,

$$\begin{aligned} 2^n a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \sin \theta_n &= 2^{n-1} a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot (2 \cos \theta_n \sin \theta_n) \\ &= 2^{n-1} a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \sin \theta_{n-1} \\ &= \cdots \\ &= 2^1 a_1 \sin \theta_1 \\ &= \sin 2\theta_1 \\ &= \sin \frac{2}{3} \pi \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となることがわかる。よって

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2^n \sin \left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}} \right)}$$

である。

(III)

[解答]

- (1) ① 2 ② 1
- (2) ③ 2 ④ $21-a$ ⑤ $2a-21$ ⑥ 4 ⑦ 9

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}2^m - 1 &= n^2 \\ &= (2r - 1)^2\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}2^m &= (2r - 1)^2 + 1 \\ &= 2(2r^2 - 2r + 1)\end{aligned}$$

である。ここで、 $2r^2 - 2r = 0$ となるから

$$\begin{aligned}2^m &= 2(0 + 1) = 2 \\ \therefore m &= 1\end{aligned}$$

であり、また

$$\begin{aligned}n^2 &= 2^1 - 1 = 1 \\ \therefore n &= 1 \quad (\because n \text{ は自然数})\end{aligned}$$

となる。

(2)

$$y^2 - 4x^4 = (y + 2x^2)(y - 2x^2)$$

であり、 $y+2x^2$ は 2^{21} の正の約数だから、ある 0 以上の整数 a を用いて

$$y + 2x^2 = 2^a \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

と表せる。このとき、

$$2^a(y - 2x^2) = 2^{21}$$

$$\therefore y - 2x^2 = 2^{21-a} \quad \dots \textcircled{2}$$

が成立する。したがって、 $a \leq 21$ であり、さらに、 x が自然数であることから、 $y + 2x^2 > y - 2x^2 \Leftrightarrow 2^a > 2^{21-a}$ であることに注意すると、結局

$$11 \leq a \leq 21 \quad \dots \textcircled{3}$$

である。①から②を引くことにより

$$2 \cdot 2x^2 = 2^\alpha - 2^{21-\alpha} = 2^{21-\alpha} (2^{2\alpha-21} - 1) \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{4}$$

が成立する。ここで、 2^{2^a-1} は1または偶数であり、また、③より、 $2^{2^a-2^1}-1$ は奇数だから、 2^{2^a-1} と $2^{2^a-2^1}-1$ は最大公約数が1である自然数となる。よってこのとき $2^{2^a-2^1}-1$ は平方数であるが、(1)よりこれが平方数となるのは

$$\therefore a = 11$$

のときである。これを④に代入すると、

$$\therefore x = 2^4 \quad (\because x \text{ は自然数})$$

となり、これをさらに①に代入すると

$$y + 2(2^4)^2 = 2^{11}$$
$$\therefore y = 2^{11} - 2^9 = 3 \cdot 2^9$$

となる。