

2014 年度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 60 分です。
5. 問題は 3 ページで大問 3 問です。余白は計算用紙です。

〔Ⅰ〕 連立方程式

$$\begin{cases} (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 26 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 42 \\ xyz = 20 \end{cases}$$

を考える。ただし、 $x > 0$ 、 $y > 0$ 、 $z > 0$ とする。次の をうめよ。

最初の式を計算して整理することにより、

$$\textcircled{1} (xy + yz + zx) + \textcircled{2} (x^2 + y^2 + z^2) = 26$$

となる。よって、 $xy + yz + zx$ の値は ③ となる。また、

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \textcircled{4} (xy + yz + zx)$$

と与えられた条件により、 $x + y + z$ の値は ⑤ となる。

したがって、 t に関する 3 次式 $(t-x)(t-y)(t-z)$ を計算すると、 t だけの式となり、 ⑥ となる。

$x < y < z$ をみたす解は $(x, y, z) = \textcircled{7}$ である。

〔Ⅱ〕 $\triangle ABC$ において、辺 BC , CA , AB の長さはそれぞれ $a = \sqrt{13}$, $b = 2\sqrt{5}$, $c = \sqrt{5}$ である。次の をうめよ。

(1) $\cos A =$ ① $, \sin A =$ ② であり、 $\triangle ABC$ の面積は ③ である。

(2) 各辺の長さが $\triangle ABC$ の各辺の長さの 2 倍であるような三角形の面積は ④ である。

自然数 n に対して、各辺の長さが $\triangle ABC$ の各辺の長さの 2^{n-1} 倍であるような三角形の面積を S_n とおく。このとき $\log_2 S_n$ は n を用いて ⑤ と表される。 $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ は n を用いて ⑥ と表される。また、 $S > 2^{26}$ となる最小の自然数 n は ⑦ である。

〔Ⅲ〕 xy 平面上で原点 O ，2 点 $A(1, 0)$ ， $B(1, 1)$ を頂点とする三角形 OAB を考える。 xy 平面上の点 $P(x, y)$ に対して， $p = x + y$ ， $q = xy$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $P(x, y)$ が $\triangle OAB$ の辺全体を動くとき，点 (p, q) が描く曲線を求めて解答欄の pq 平面に図示せよ。

(2) (1) で求めた曲線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(以 上)