2014 年度入学試験問題

数　学

注　意　事　項

1．試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。

2．解答はすべて黒鉛筆(ＨＢ)〈シャープペンシルは，ＨＢ 0.5 mm以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。

3．解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し，切取線から切り離してください。

4．試験時間は 100 分です。

5．問題は 4 ページで大問 4 問です。余白は計算用紙です。

6．解答用紙は両面になっています。

〔Ⅰ〕 pを2以上の整数とする。次の問いに答えよ。

(1) $x>0$のとき、不等式

$$x^p+p-1 \geqq px$$

が成り立つことを示せ。

(2) $a>0$, $b>0$のとき，不等式

$$a^p+(p-1)b^{\frac{p}{p-1}} \geqq pab$$

が成り立つことを示せ。

(3) $p=3$とする。(2)の不等式において等式が成立するとき，aをbを用いて表せ。

〔II〕 a を正の定数とする。中心の座標が $(1,\ a,\ -a^2)$ の球面が xy 平面に接しているとする。

次の $\boxed{}$ をうめよ。

(1) この球面の方程式を a を用いて表すと，

$$(x-1)^2+(y-a)^2+\left(\boxed{\ ①\ }\right)^2=\boxed{\ ②\ }$$

である。

(2) この球面がさらに xz 平面と共有点をもつための a の値の範囲は $\boxed{\ ③\ }$ である。

(3) xy 平面と接しているこの球面がさらに xz 平面と共有点をもち，その共有点の全体が半径 $\sqrt{2}$ の円になっているとする。このとき，この球面の方程式は

$$(x-1)^2+\left(y-\boxed{\ ④\ }\right)^2+\left(\boxed{\ ⑤\ }\right)^2=\boxed{\ ⑥\ }$$

となる。

この球面の内部も含めた球の体積は $\boxed{\ ⑦\ }$ である。また，この球が xz 平面で切り取られる小さい方の部分の体積は $\dfrac{\boxed{\ ⑧\ }}{3}\pi$ である。

〔III〕 座標平面上の曲線 C が媒介変数 t を用いて，

$$x = 1 - \cos t, \quad y = 2 - \sin 2t, \quad 0 \leqq t \leqq \pi$$

と表示されている。次の問いに答えよ。

(1) $0 < t < \pi$ の範囲で，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

(2) $0 < t < \pi$ の範囲で，$\dfrac{dy}{dx} = 0$ を満たす t の値をすべて求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(3) 曲線 C の概形を解答欄の座標平面上にかけ。ただし，曲線の凹凸は調べなくてよい。

(4) 曲線 C と直線 $x = 2$，x 軸，および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。

〔Ⅳ〕 次の $\boxed{}$ をうめよ。

(1) 条件

$$a_1 = 1,\quad \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+1} = \frac{a_n}{1+4na_n} \quad (\, n = 1, 2, 3, \cdots\cdots \,)$$

によって定められる数列 $\{\, a_n \,\}$ の一般項は $a_n = \boxed{\text{①}}$ である。
また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \boxed{\text{②}}$ である。

(2) 座標空間において，実数 t を用いて座標が $(\,\cos(\pi t^2),\ \sin(\pi t^2),\ t\,)$ と表される点で，球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 上にあるものは 2 点ある。t の値が小さい方の点を P，t の値が大きい方の点を Q とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta = \boxed{\text{③}}$ である。

(3) TAKOYAKI の 8 文字を 1 列に並べるとき，すべての並べ方は $\boxed{\text{④}}$ 通りある。また，同じ文字が隣り合わない並べ方は $\boxed{\text{⑤}}$ 通りある。

(4) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。$A = aE + bJ$ とするとき，

$$A^2 = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{pmatrix}$$

を満たす正の数の組 $(\,a,\ b\,)$ を求めると，$(\,a,\ b\,) = \boxed{\text{⑥}}$ である。ただし，$a > b$ とする。

(5) $\displaystyle \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sin\left(\boxed{\text{⑦}}\right)$ である。

（以　上）