

2014 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 100 分です。
5. 問題は 4 ページで大問 4 問です。余白は計算用紙です。
6. 解答用紙は両面になっています。

〔 I 〕 次の問いに答えよ。

(1) $\int \frac{\log x}{x^2} dx = -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} + C$ を利用して、不定積分

$$I = \int \frac{(\log x)^2}{x^2} dx$$

を求めよ。ただし、 C は積分定数とする。

(2) $x > 0$ のとき、不等式

$$\frac{4x^{\frac{1}{4}}}{e} - \log x \geq 0$$

を示せ。ただし、 e は自然対数の底である。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{(\log x)^2}{x^2} dx$ を求めよ。

〔Ⅱ〕 次の をうめよ。

第1象限において動点Qを、原点を中心とする半径1の円の内部にとり、
 $O(0, 0)$, $P(1, 0)$ とする。 $\angle OPQ = \theta$, $r = |\overrightarrow{PQ}|$ とおく。 $\overrightarrow{OQ}$ を成分表示
すると、(① , ②)となる。 $k = |\overrightarrow{OQ}|$ とおくと、 r と θ を用い
て、 $k = \sqrt{\text{ ③ }$ と表される。 $1 - k^2 = (\text{ ④)}$ r であるから、点Q
が角 θ を一定に保ったままPに近づくときの比 $\frac{r}{1-k}$ の極限は θ の関数として
 $f(\theta) = \frac{1}{\text{ ⑤ }$ と表される。このとき、 $\lim_{\theta \rightarrow +0} f(\theta) = \text{ ⑥ }$ であり、
 $f(\theta) < 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ を満たす θ の範囲は ⑦ である。

〔Ⅲ〕 $g(x)$ を x の多項式とし、

$$f(x) = \int_0^x (3t^2 - 4t + 1)e^{g(t)} dt$$

とする。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を $g(x)$ を用いて表せ。

(2) すべての x について

$$f(x) + e^{-\frac{1}{27}} = e^{g(x)}$$

が成り立つとき、 $g(x)$ を求めよ。

(3) (2) の条件が成り立つとき、関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

〔Ⅳ〕 次の をうめよ。

(1) 方程式 $81\sqrt{3} \times 9^{x^2} - 3^{6x} = 0$ の解は $x =$ ① である。

(2) 連立方程式

$$\begin{cases} x(x-2y-1) = 0 \\ y(2x-y-1) = 0 \end{cases}$$

の解 (x, y) の個数は ② 個である。

(3) a, b を正の数とすると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{a+b}{n} + \frac{ab}{n^2} \right)^n =$ ③ である。

(4) 不等式 $\tan^3 \frac{\pi}{n+2} - \frac{7}{3} \tan \frac{\pi}{n+2} + \frac{2}{3} \sqrt{3} < 0$ を満たす自然数 n をすべて求めると、 ④ である。

(5) 原点を中心とする半径 1 の円 C と直線 $l: y = mx + 2$ がある。 C と l が共有点をもたない条件は m を用いて ⑤ と表される。このとき、 C 上に動点 P 、 l 上に動点 Q をとったとき、距離 PQ の最小値を m を用いて表すと ⑥ である。

(6) m を 2 以上の整数とすると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{2m-1}{m}}} \sum_{k=1}^n k^{\frac{m-1}{m}} =$ ⑦ である。

(以 上)