

2014 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 60 分です。
5. 問題は 3 ページで大問 3 問です。余白は計算用紙です。

〔 I 〕 原点を $O(0, 0, 0)$ とする座標空間内の 3 点 $A(1, 2, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(-5, 4, 2)$ を考える。次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角を θ とするとき, $\cos \theta$ を求めよ。
- (2) 3 点 O, A, B の定める平面を α とする。点 H は α 上にあり, 直線 CH は α に直交している。このとき, $\overrightarrow{OH} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ を満たす実数 s, t を求めよ。
- (3) 4 点 O, A, B, C を頂点とする四面体の体積を求めよ。

〔Ⅱ〕 次の漸化式によって定義される数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_n = \sqrt{\frac{1+a_{n-1}}{2}} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

次の をうめよ。

(1) a_1 は実数 $\theta_1 = \text{①}$ $\left(0 \leq \theta_1 < \frac{\pi}{2}\right)$ を用いて $a_1 = \cos \theta_1$ と表され、 a_2

は実数 $\theta_2 = \text{②}$ $\left(0 \leq \theta_2 < \frac{\pi}{2}\right)$ を用いて $a_2 = \cos \theta_2$ と表される。

(2) 一般に、実数 θ に対して、 $\cos^2 \theta$ は $\cos 2\theta$ を用いて $\cos^2 \theta = \text{③}$ のように表されるから、

$$a_n = \cos(\text{④}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

であると推測される。数学的帰納法により、この推測が正しいことがわかる。

さて、

$$2 \cos(\text{④}) \sin(\text{④}) = \sin(\text{⑤})$$

と書けることに注意して、同様の計算を繰り返し行くと、

$$2^n a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n \cdot \sin(\text{④}) = \text{⑥}$$

であることがわかる。よって、

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = \frac{\text{⑥}}{2^n \sin(\text{④})}$$

である。

〔Ⅲ〕 $y^2 = 4x^4 + 2^{21}$ を満たす自然数 x, y を求める。次の を自然数または a に関する式でうめよ。

- (1) 自然数 m, n に対して、 $2^m - 1 = n^2$ が成立したとする。 2^m は偶数だから、 n は奇数となる。よって、ある自然数 r を用いて $n = 2r - 1$ と表せる。このとき、

$$2^m = 2(2r^2 - \text{①} r + 1)$$

が成立する。もし、 $2r^2 - \text{①} r$ が 0 でなければ、 2^m がある 1 より大きい奇数で割りきれることになり、矛盾する。したがって、 $m = n = \text{②}$ となる。

- (2) $y^2 - 4x^4$ を因数分解すると $(y + \text{③} x^2)(y - \text{③} x^2)$ となる。

$y + \text{③} x^2$ は 2^{21} の正の約数だから、ある 0 以上の整数 a を用いて

$y + \text{③} x^2 = 2^a$ と表せる。このとき、 $y - \text{③} x^2 = 2^{\text{④}}$ が成立する。よって、

$$2 \cdot \text{③} x^2 = 2^{\text{④}} (2^{\text{⑤}} - 1)$$

が成立する。一般に、最大公約数が 1 である自然数 u, v に対して、 uv がある自然数の 2 乗になるならば、 u, v それぞれがある自然数の 2 乗になる。したがって、(1) より、 $x = 2^{\text{⑥}}$ 、 $y = 3 \cdot 2^{\text{⑦}}$ と求まる。

(以 上)