

## 〔 I 〕

(1)

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta \\
 &= 2 \left( \cos \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin \theta \cdot \frac{1}{2} \right) \\
 &= 2 \cos \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right)
 \end{aligned}$$

である。  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき

$$\frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$$

より

$$-1 \leq \cos \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$$

となるので、  $x$  のとりうる範囲は

$$-2 \leq x \leq 2$$

となる。

(答)  $-2 \leq x \leq 2$

(2)

$$\begin{aligned}
 x^2 - 4x + 3 &> 0 \\
 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) &> 0 \\
 \therefore x < 1, 3 < x
 \end{aligned}$$

となるので、  $x^2 - 4x + 3 > 0$  のとき、  $x$  の範囲は(1)と合わせて

$$-2 \leq x < 1$$

である。したがって、

$$-2 \leq x < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \cos \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right) < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} < \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{5}{3}\pi \left( \because \frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi \right)$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{3}{2}\pi$$

と求まる。

(答)  $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{3}{2}\pi$

【Ⅲ】

【解答】

①  $120^\circ$

②  $-\frac{1}{2}$

③  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

④  $6$

⑤  $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$

【解説】

(1)

条件より,

$$|\vec{p}|=1, |\vec{q}|=1, |\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{3}$$

であるから,  $\vec{p}$  と  $\vec{q}$  のなす角度を  $\theta$  ( $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ) とすると,  $\triangle OPQ$  に関する余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{OP^2 + OQ^2 - PQ^2}{2 \cdot OP \cdot OQ} \\ &= \frac{1^2 + 1^2 - (\sqrt{3})^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore \theta = 120^\circ \quad (\because 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned}\vec{p} \cdot \vec{q} &= |\vec{p}| |\vec{q}| \cos \theta \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

と計算できる。 $a$  を実数とし,  $C$  上の点  $R$  が

$$\overrightarrow{OR} = a\vec{p} - \frac{2}{\sqrt{3}}\vec{q}$$

を満たすとする。このとき,  $|\overrightarrow{OR}|=1$  であるから,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OR}|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \left| a\vec{p} - \frac{2}{\sqrt{3}}\vec{q} \right|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow a^2 |\vec{p}|^2 - \frac{4}{\sqrt{3}} a \cdot (\vec{p} \cdot \vec{q}) + \frac{4}{3} |\vec{q}|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow a^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} a + \frac{1}{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left( a + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 &= 0 \\ \therefore a &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

と求まる。したがって,

$$\overrightarrow{OR} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{p} - \frac{2}{\sqrt{3}}\vec{q}$$

となる。このとき,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} \\ &= -\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\vec{p} - \frac{2}{\sqrt{3}}\vec{q}\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PR}|^2 &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 |\vec{p}|^2 + \frac{4}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \vec{p} \cdot \vec{q} + \frac{4}{3} |\vec{q}|^2 \\ &= \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}\right) + \frac{4}{3} \\ &= 2\end{aligned}$$

より,

$$|\overrightarrow{PR}| = \sqrt{2}$$

と求まる。また,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{p} - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)\vec{q}\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{QR}|^2 &= \frac{1}{3} |\vec{p}|^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right) \vec{p} \cdot \vec{q} + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 |\vec{q}|^2 \\ &= \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{7}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) \\ &= 2 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{QR}| &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} \\ &= \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

と求まる。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} &= (\vec{q} - \vec{p}) \cdot \left\{ -\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)\vec{p} - \frac{2}{\sqrt{3}}\vec{q} \right\} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right) |\vec{p}|^2 + \left\{ \frac{2}{\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right) \right\} \vec{p} \cdot \vec{q} - \frac{2}{\sqrt{3}} |\vec{q}|^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{3 - \sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

であるから,  $\triangle PQR$  の面積は,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2 |\overrightarrow{PR}|^2 - (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR})^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{(\sqrt{3})^2 \cdot (\sqrt{2})^2 - \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{6 - \frac{6 - 3\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{12 + 6\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(3 + \sqrt{3})^2} \\ &= \frac{3 + \sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

と求まる。