

〔 I 〕

(1)

与式 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1}^3 = 2^{10} a_n^4$ より, すべての n に対して $a_n > 0$ である。よって漸化式 $a_{n+1}^3 = 2^{10} a_n^4$

より

$$\begin{aligned}\log_2 a_{n+1}^3 &= \log_2 (2^{10} a_n^4) \\ \Leftrightarrow 3 \log_2 a_{n+1} &= 4 \log_2 a_n + 10 \\ \Leftrightarrow 3b_{n+1} &= 4b_n + 10 \quad (\because b_n = \log_2 a_n)\end{aligned}$$

となる。また,

$$\begin{aligned}b_1 &= \log_2 a_1 \\ &= \log_2 \frac{1}{2} \\ &= -1\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 3b_{n+1} = 4b_n + 10$$

(2)

(1)で求めた漸化式より

$$\begin{aligned}b_{n+1} + 10 &= \frac{4}{3}(b_n + 10) \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^n (b_1 + 10) \\ &= 9 \left(\frac{4}{3}\right)^n \quad (\because b_1 = -1)\end{aligned}$$

となる。これは $n=0$ としても成り立つから,

$$b_n = 9 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} - 10$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b_n = 9 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} - 10$$

(3)

(2)より

$$\begin{aligned}\log_2 a_n &< \log_2 2^{2015} \\ \Leftrightarrow b_n &< 2015 \\ \Leftrightarrow 9 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} - 10 &< 2015 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} &< 225\end{aligned}$$

となる。上式の両辺の2の対数をとると

$$\begin{aligned}\log_2 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} &< \log_2 225 \\ \Leftrightarrow (n-1)(2 - \log_2 3) &< 2 \log_2 3 + 2 \log_2 5 \\ \Leftrightarrow n &< \frac{2 \cdot 1.585 + 2 \cdot 2.322}{2 - 1.585} + 1 \\ \Leftrightarrow n &< 19.8 \dots\end{aligned}$$

となるから, 与式を満たす最大の n は $n=19$ である。

$$(\text{答}) \quad n=19$$

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	①	②		
	$-\frac{1}{2}$	$a+b+\frac{1}{4}$		
(2)	③	④	⑤	
	$ax+\frac{3}{2}a+b+\frac{1}{4}$	$3a+\frac{1}{2}$	$3a^2+2a+b+\frac{1}{4}$	
(3)	⑥			
	$(3a+1)^3$			

〔解説〕

(1)

二つの放物線をあらわす方程式から y を消去して整理すると

$$\begin{aligned}x^2-2ax+b&=x^2-2bx+a \\ \Leftrightarrow (a-b)(2x+1)&=0\end{aligned}$$

となる。 $a=b$ のとき、二つの放物線は一致して仮定に反するので $a \neq b$ である。よって上式

より二つの放物線の共有点の x 座標は $x=-\frac{1}{2}$ である。放物線 C_1 をあらわす方程式から、共有点の y 座標は

$$\begin{aligned}y&=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2a\left(-\frac{1}{2}\right)+b \\ &=a+b+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。

(2)

l は点 $\left(-\frac{1}{2}, a+b+\frac{1}{4}\right)$ を通り傾きが a の直線であるから、その方程式は

$$\begin{aligned}y&=a\left(x+\frac{1}{2}\right)+a+b+\frac{1}{4} \\ &=ax+\frac{3}{2}a+b+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。 l と C_1 の方程式から y を消去すると

$$\begin{aligned}x^2-2ax+b&=ax+\frac{3}{2}a+b+\frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow 4x^2-12ax-6a-1&=0 \\ \Leftrightarrow (2x+1)(2x-6a-1)&=0\end{aligned}$$

となるから、 l と C_1 の共有点で(1)の共有点以外の点の x 座標は $3a+\frac{1}{2}$ である。 l の方程式より、

この点の y 座標は

$$\begin{aligned}y&=a\left(3a+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}a+b+\frac{1}{4} \\ &=3a^2+2a+b+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。よって求める座標は $\left(3a+\frac{1}{2}, 3a^2+2a+b+\frac{1}{4}\right)$ となる。

(3)

a は正の定数であるから、 $3a+\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ となる。よって求める面積は

$$\begin{aligned}S&=-\int_{-\frac{1}{2}}^{3a+\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-3a-\frac{1}{2}\right)dx \\ &=\frac{1}{6}(3a+1)^3\end{aligned}$$

となる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥
1	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{12}$

〔解説〕

(1)

$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$ のとき、得点が0となる。よって $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (5, 4, 3, 2, 1)$ のとき得点が0となる。

(2)

$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ の組み合わせは

$$5! = 120 \text{ (通り)}$$

であり、(1)より得点が0となるのは1通りであるから、求める確率は

$$\frac{1}{120} \text{ (通り)}$$

である。

(3)

(a_3, a_4, a_5) が2, 3, 4の順列となればよいから、求める確率は

$$\frac{3!}{120} = \frac{1}{20}$$

となる。

(4)

$a_1 > a_2 > a_3$ となればよいから、 $(a_1, a_2, a_3) = (4, 3, 2)$ である。よって求める確率は

$$\frac{1}{120} \text{ (通り)}$$

となる。

(5)

場合分けをして得点が4となる確率を求める。

(i) $(a_2, a_3) = (1, 5)$ のとき、

(a_1, a_4, a_5) が2, 3, 4の順列となればよいから、このときの確率は

$$\frac{3!}{120} = \frac{1}{20}$$

となる。

(ii) $(a_3, a_4) = (1, 5)$ のとき、

$(a_1, a_2, a_5) = (3, 2, 4), (4, 2, 3), (4, 3, 2)$ となればよい。よってこのときの確率は

$$\frac{3}{120} = \frac{1}{40}$$

となる。

(3), (4)の結果と合わせて、求める確率は

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{120} = \frac{2}{15}$$

となる。

(6)

以下場合分けをして、得点が4であり a_5 が偶数となるような確率を求める。

(i) $(a_1, a_2) = (1, 5)$ のとき、

$(a_3, a_4, a_5) = (2, 3, 4), (3, 2, 4), (3, 4, 2), (4, 3, 2)$ となればよいから、このときの確率は

$$\frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

となる。

(ii) $(a_2, a_3) = (1, 5)$ のとき、

$(a_1, a_4, a_5) = (2, 3, 4), (3, 2, 4), (3, 4, 2), (4, 3, 2)$ となればよいから、このときの確率は

$$\frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

となる。

(i) $(a_3, a_4) = (1, 5)$ のとき、

$(a_1, a_2, a_5) = (3, 2, 4), (4, 3, 2)$ となればよいから、このときの確率は

$$\frac{2}{120} = \frac{1}{60}$$

となる。

以上のことから求める確率は

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} = \frac{1}{12}$$

となる。