

〔Ⅰ〕

与えられた式を

$$a_{n+1} = (n+2)a_n + n! \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

とおく。

(1)

①の両辺を $(n+2)!$ で割ると、

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{(n+2)!} &= \frac{(n+2)a_n + n!}{(n+2)!} \\ \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{(n+2)!} &= \frac{a_n}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

となる。よって、 $b_n = \frac{a_n}{(n+1)!}$ とおくと、数列 $\{b_n\}$ の漸化式は

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

である。

$$(\text{答}) \quad b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

(2)

(1)より、部分分数分解をして、

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= b_n + \frac{1}{(n+2)(n+1)} \\ \Leftrightarrow b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

となる。数列 $\{b_n\}$ の階差数列は $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ であるため、 $n \geq 2$ について、数列 $\{b_n\}$ の一般項は、

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{a_1}{2!} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

となる。また、これは $n=1$ のときも成り立つ。以上より、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$\begin{aligned} a_n &= b_n \cdot (n+1)! \\ &= \left(2 - \frac{1}{n+1} \right) \cdot (n+1)! \\ &= 2(n+1)! - n! \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 2(n+1)! - n!$$

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 2^{k-1} a_k &= \sum_{k=1}^n 2^{k-1} \cdot \{2(k+1)! - k!\} \\ &= \sum_{k=1}^n \{2^k (k+1)! - 2^{k-1} k!\} \\ &= \sum_{k=1}^n 2^k (k+1)! - \sum_{k=1}^n 2^{k-1} k! \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 2^k (k+1)! &= 2 \cdot 2! + 2^2 \cdot 3! + 2^3 \cdot 4! + \cdots + 2^n \cdot (n+1)! \\ \sum_{k=1}^n 2^{k-1} k! &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 2^2 \cdot 3! + \cdots + 2^{n-1} \cdot n! \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 2^{k-1} a_k &= \sum_{k=1}^n 2^k (k+1)! - \sum_{k=1}^n 2^{k-1} k! \\ &= 2^n (n+1)! - 1 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 2^n (n+1)! - 1$$

〔Ⅱ〕

〔解答〕

- ① $\frac{1}{n}$
- ② 1
- ③ $\frac{1}{n}$
- ④ $y = -\frac{1}{n}x + \frac{2}{n}$
- ⑤ $y = nx - n + \frac{1}{n}$
- ⑥ $\frac{2}{n}$
- ⑦ $2(1 - \log 2)$

〔解説〕

点 P が第 1 象限において、曲線 $x^2 + n^2 y^2 = 2$ 上を動くとき、 $x^2, n^2 y^2 > 0$ であるため、相加相乗平均の関係より、

$$\frac{x^2 + n^2 y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 \cdot n^2 y^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq nxy$$

$$\therefore xy \leq \frac{1}{n}$$

となる。等号は、

$$x^2 = n^2 y^2 = 1$$

$$\therefore x = ny = 1$$

のときに成り立つ。よって、 xy の最大値 a_n は $\frac{1}{n}$ であり、 xy が最大となる P の座標 $P(x_n, y_n)$

は $P\left(1, \frac{1}{n}\right)$ である。したがって、接線の方程式は

$$1 \cdot x + n^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot y = 2$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{n}x + \frac{2}{n}$$

となる。また、曲線 $x^2 + n^2 y^2 = 2$ の点 (x_n, y_n) における法線の方程式は、傾きが n となるため、

$$y - y_n = n(x - x_n)$$

$$\therefore y = nx - n + \frac{1}{n}$$

である。この接線と x 軸、 y 軸との交点はそれぞれ $(2, 0), \left(0, \frac{2}{n}\right)$ であるため、この接線と x 軸

および y 軸で囲まれた三角形の面積 S_n は、

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n}$$

である。また、このとき、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{k=1}^n k a_{n+k} \right) S_n \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n+k} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{n}{n+k} \right) \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \right) \end{aligned}$$

となり、区分求積法を用いて、

$$\begin{aligned} 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \right) &= 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= 2 \left[x - \log|1+x| \right]_0^1 \\ &= 2(1 - \log 2) \end{aligned}$$

となる。

【Ⅲ】

(1)

$$f(x)=xe^{-\frac{1}{2}x^2}$$

より、

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-\frac{1}{2}x^2} + x \cdot \left(-xe^{-\frac{1}{2}x^2}\right) \\ &= (1-x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ &= (1-x)(1+x)e^{-\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

である。

(答) $f'(x)=(1-x)(1+x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$

また、 $x=\pm 1$ のとき、 $f'(x)=0$ となるため、関数 $f(x)$ に関する増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小値	$\nearrow$	極大値	$\searrow$

よって、上の増減表より、極大値は

$$f(1)=e^{-\frac{1}{2}}$$

であり、極小値は

$$f(-1)=-e^{-\frac{1}{2}}$$

となる。

(答) 極大値： $e^{-\frac{1}{2}}$ ，極小値： $-e^{-\frac{1}{2}}$

(2)

$$f'(x)=(1-x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

より、

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2xe^{-\frac{1}{2}x^2} + (1-x^2) \cdot \left(-xe^{-\frac{1}{2}x^2}\right) \\ &= (x^2-3)xe^{-\frac{1}{2}x^2} \\ &= x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})e^{-\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $f''(x)=x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})e^{-\frac{1}{2}x^2}$

また、 $x=0, \pm\sqrt{3}$ のとき、 $f''(x)=0$ となるため、(1)と合わせて関数 $f(x)$ に関する増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

よって、上の増減表より、変曲点は $x=0, \pm\sqrt{3}$ のときであり、

$$f(0)=1$$

$$f(\pm\sqrt{3})=\pm\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}} \text{ (複合同順)}$$

であるため、変曲点の座標は、

$$(0, 0), \left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}\right), \left(\sqrt{3}, \sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}\right)$$

となる。

(答) $(0, 0), \left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}\right), \left(\sqrt{3}, \sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}\right)$

(3)

$$g(x)=x^2f(x)$$

とおく。このとき、

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2xf(x) + x^2f'(x) \\ &= 2x \cdot xe^{-\frac{1}{2}x^2} + x^2 \cdot (1-x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ &= x^2(3-x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ &= -x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})e^{-\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

である。 $x=0, \pm\sqrt{3}$ のとき、 $g'(x)=0$ となるため、関数 $g(x)$ に関する増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	極小値	$\nearrow$	0	$\nearrow$	極大値	$\searrow$

ここで、 $x<0$ のとき、 $f(x)<0$ であるため、 $g(x)<0$ となる。よって、 $x\geq 0$ の範囲について考えればよく、上の増減表より、極大値は

$$g(\sqrt{3})=3f(\sqrt{3})=3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}$$

であるため、

$$g(x)\leq 3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}$$

$$\therefore x^2f(x)\leq 3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}$$

が成り立つことが示せた。

(証明終)

(4)

$$\begin{aligned} \int_0^a x^2 f(x) dx &= \int_0^a x^2 \cdot xe^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= \int_0^a x^2 \cdot \left(-e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)' dx \\ &= \left[x^2 \left(-e^{-\frac{1}{2}x^2}\right) \right]_0^a - \int_0^a 2x \left(-e^{-\frac{1}{2}x^2}\right) dx \\ &= -a^2 e^{-\frac{1}{2}a^2} + 2 \int_0^a xe^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= -a^2 e^{-\frac{1}{2}a^2} + 2 \left[-e^{-\frac{1}{2}x^2} \right]_0^a \\ &= -a^2 e^{-\frac{1}{2}a^2} - 2e^{-\frac{1}{2}a^2} + 2 \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $a>0$ のとき、(3)より、

$$a^2 f(a) \leq 3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow a^2 \cdot ae^{-\frac{1}{2}a^2} \leq 3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 0 < a^2 e^{-\frac{1}{2}a^2} \leq \frac{3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}}{a}$$

$$\therefore 0 \leq \lim_{a \rightarrow \infty} a^2 e^{-\frac{1}{2}a^2} \leq \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}}{a}$$

となり、

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}}{a} = 0$$

であるため、はさみうちの原理より、

$$\lim_{a \rightarrow \infty} a^2 e^{-\frac{1}{2}a^2} = 0 \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる。また、

$$\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{2}a^2} = 0 \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

である。以上、①、②、③より、

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a x^2 f(x) dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-a^2 e^{-\frac{1}{2}a^2} - 2e^{-\frac{1}{2}a^2} + 2 \right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。

【IV】

【解答】

(1) ① -1 ② 2

(2) ③ $(4, 11), (5, 7)$

(3) ④ $x^2 - s^2 + s$

(4) ⑤ -2

(5) ⑥ e^2

【解説】

(1)

与式を変形して、

$$\frac{1 + \alpha + p\alpha^2 + q\alpha^3}{\alpha^{10}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \alpha + p\alpha^2 - q = 0 \quad (\because \alpha^3 = -1) \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、

$$\alpha^3 = -1$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha + 1) = 0$$

であり、 α は虚数であるため、 $\alpha \neq -1$ より、

$$\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 = \alpha - 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。②を①に代入して、

$$1 + \alpha + p(\alpha - 1) - q = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha(1 + p) + (1 - p - q) = 0$$

となる。ここで、 α は虚数より $\alpha(1 + p)$ も虚数、 $1 - p - q$ は実数より、

$$\begin{cases} 1 + p = 0 \\ 1 - p - q = 0 \end{cases}$$

$$\therefore p = -1, q = 2$$

を得る。

(2)

与式を変形して、

$$\log 2 = \log \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} + \log \frac{1 + \frac{1}{y}}{1 - \frac{1}{y}}$$

$$\Leftrightarrow \log 2 = \log \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \left(\frac{y+1}{y-1} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{(x+1)(y+1)}{(x-1)(y-1)}$$

$$\Leftrightarrow 2(xy - x - y + 1) = xy + x + y + 1$$

$$\Leftrightarrow xy - 3x - 3y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(y-3) = 8$$

となる。 x, y は $x \leq y$ を満たす自然数であるため、

$$\{(x-3), (y-3)\} = (1, 8), (2, 4)$$

$$\therefore (x, y) = (4, 11), (5, 7)$$

であり、このとき、真数条件

$$\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} > 0, \frac{1 + \frac{1}{y}}{1 - \frac{1}{y}} > 0$$

を満たす。

(3)

題意より、 $P(t, t^2), Q(t+1, (t+1)^2)$ であり、 $R(X, Y)$ とおくと、

$$\begin{cases} X = (1-s)t + s(t+1) \\ Y = (1-s)t^2 + s(t+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = t + s \\ Y = t^2 + 2st + s \end{cases}$$

となる。 t がすべての実数値をとって変化するとき、 X もすべての実数値をとり得る。2式

から t を消去すると、

$$Y = (X - s)^2 + 2s(X - s) + s$$

$$\therefore Y = X^2 - s^2 + s$$

となるため、点 R の軌跡は、

$$\text{曲線 } y = x^2 - s^2 + s$$

である。

(4)

$$t = \frac{\pi}{2} - x \text{ とおくと、}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2 \cos x)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \left\{ 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \right\}}{-t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(2 \sin t)}{-t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(2 \sin t)}{2 \sin t} \cdot \frac{2 \sin t}{-t}$$

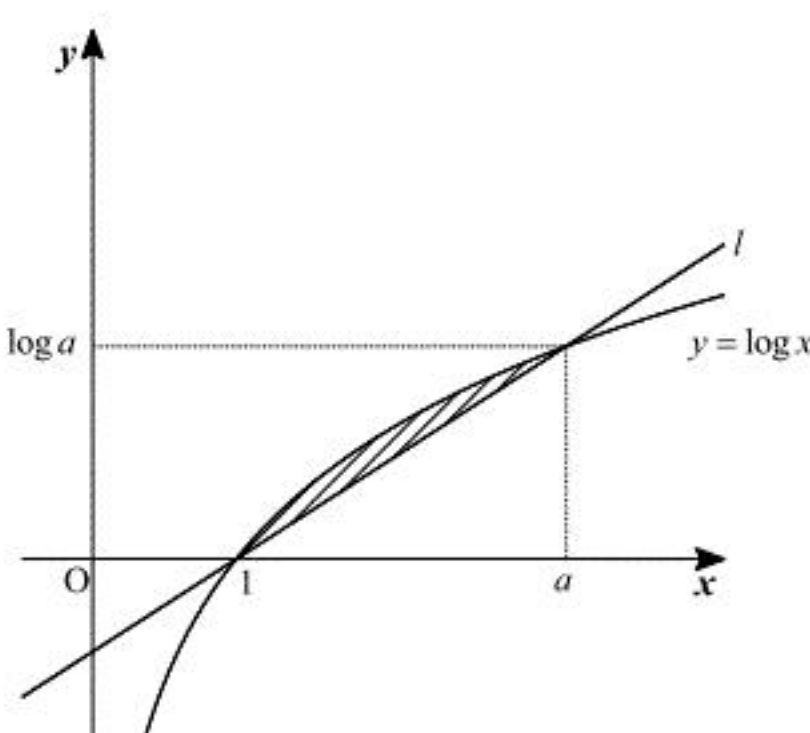
$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(2 \sin t)}{2 \sin t} \cdot (-2) \cdot \frac{\sin t}{t}$$

$$= -2$$

となる。

(5)

求める図形の面積 S は以下の斜線部である。



上図より、面積 S は

$$S = \int_1^a \log x dx - \frac{1}{2}(a-1) \log a$$

$$= [x \log x - x]_1^a - \frac{1}{2}(a-1) \log a$$

$$= a \log a - a + 1 - \frac{1}{2}(a-1) \log a$$

となる。この面積が 2 より大きくなるのは、

$$S > 2$$

$$\Leftrightarrow a \log a - a + 1 - \frac{1}{2}(a-1) \log a > 2$$

$$\Leftrightarrow a \log a - a - 1 - \frac{1}{2}(a-1) \log a > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+1) \log a - (a+1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(\log a - 2) > 0$$

$$\Leftrightarrow \log a - 2 > 0 \quad (\because a > 1 \Leftrightarrow a+1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow \log a > 2$$

$$\therefore a > e^2$$

のときである。