

〔Ⅰ〕

〔解答〕

①	②	③	④
$0 < x < 1, 1 < x$	$\frac{Y}{2}$	$\frac{1}{2Y}$	$Y^2 - 2Y - 3$
⑤	⑥	⑦	⑧
3	-1	8	$\frac{1}{2}$

〔解説〕

対数の底は1でない正の数であり、真数は正であるから、 x のとりうる値の範囲は、

$$(0 < x^2 < 1 \text{ または } 1 < x^2) \text{ かつ } x > 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 1, 1 < x$$

である。ここで、 $Y = \log_2 x$ とおくと、

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4}$$

$$= \frac{\log_2 x}{2}$$

$$= \frac{Y}{2}$$

$$\log_{x^2} 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 x^2}$$

$$= \frac{1}{2\log_2 x}$$

$$= \frac{1}{2Y}$$

となる。従って、与えられた方程式(1)は

$$\log_4 x - 3\log_{x^2} 2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2Y} = 1$$

$$\Leftrightarrow Y^2 - 2Y - 3 = 0$$

と変形でき、これを解くと、

$$(Y-3)(Y+1) = 0$$

$$\therefore Y = 3, -1$$

となる。これより、

$$\log_2 x = 3 \therefore x = 8$$

$$\log_2 x = -1 \therefore x = \frac{1}{2}$$

を得る。

〔Ⅱ〕

(1)

$$\begin{aligned}
 y &= (x - \alpha)(x - \beta) \\
 &= x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta \\
 &= \left(x - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \frac{(\alpha + \beta)^2}{4} + \alpha\beta \\
 &= \left(x - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \frac{(\beta - \alpha)^2}{4}
 \end{aligned}$$

となるので、 C の頂点の座標は $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, -\frac{(\beta - \alpha)^2}{4}\right)$ である。

$$(答) \left(\frac{\alpha + \beta}{2}, -\frac{(\beta - \alpha)^2}{4}\right)$$

(2)

$y = (x - \alpha)(x - \beta)$ と x 軸との交点の座標は $(\alpha, 0), (\beta, 0)$ であり、 $\alpha < x < \beta$ において

$$(x - \alpha)(x - \beta) < 0$$

となることから、求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned}
 S &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\
 &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3
 \end{aligned}$$

となる。これが $\frac{32}{3}$ となるので、

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 &= \frac{32}{3} \\
 \Leftrightarrow (\beta - \alpha)^3 &= 64 \\
 \therefore \beta - \alpha &= 4
 \end{aligned}$$

である。

$$(答) \beta - \alpha = 4$$

(3)

2 点 $(\alpha, 0), (\beta, 0)$ を結ぶ線分を三角形の底辺と考えると、三角形の高さは C の頂点の y 座標の絶対値となる。したがって、求める面積を T とすると、

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \cdot (\beta - \alpha) \cdot \frac{(\beta - \alpha)^2}{4} \\
 &= \frac{1}{8} \cdot 4^3 \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

①	②	③	④
$n-1$	$10-n$	1	10
⑤	⑥	⑦	⑧
10	$n+2k-5$	$-n+2k+6$	$4k+2$

〔解説〕

$$\begin{aligned} 36a_n &= 36 \cdot 2^{n-3} \cdot 3^{5-(n-3)} \\ &= 2^{n-1} \cdot 3^{10-n} \end{aligned}$$

と変形できる。2と3が互いに素であることに注意すると、 $36a_n$ が整数となるのは

$$n-1 \geq 0 \text{ かつ } 10-n \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq n \leq 10$$

を満たす場合である。この範囲にあるすべての整数 n について $36a_n$ の和をとると、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10} (2^{n-1} \cdot 3^{10-n}) &= \sum_{n=1}^{10} 3^9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ &= 3^9 \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= 3^9 \cdot 3 \cdot \left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\} \\ &= 3^{10} - 2^{10} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} (36)^{k-1} a_n &= (2^{2k-2} \cdot 3^{2k-2}) (2^{n-3} \cdot 3^{8-n}) \\ &= 2^{n+2k-5} \cdot 3^{-n+2k+6} \end{aligned}$$

と変形できる。上と同様にして $(36)^{k-1} a_n$ が整数となる条件を求めると、

$$n+2k-5 \geq 0 \text{ かつ } -n+2k+6 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -2k+5 \leq n \leq 2k+6$$

となる。よって、この範囲にあるすべての整数 n について $(36)^{k-1} a_n$ の和をとると、

$$\begin{aligned} \sum_{n=-2k+5}^{2k+6} \{(36)^{k-1} a_n\} &= \sum_{n=-2k+5}^{2k+6} (2^{n+2k-5} \cdot 3^{-n+2k+6}) \\ &= \sum_{n=-2k+5}^{2k+6} 3^{4k+1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2k-5} \\ &= 3^{4k+1} \cdot \sum_{n=1}^{4k+2} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ &= 3^{4k+1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{4k+2}}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= 3^{4k+1} \cdot 3 \cdot \left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{4k+2}\right\} \\ &= 3^{4k+2} - 2^{4k+2} \end{aligned}$$

となる。