

〔Ⅰ〕

(1)

関数 $g(t)$ を $g(t) = (1 - 2\sin t)\sin t$ とおき、その原始関数の 1 つを $G(t)$ とおく。このとき、関数 $f(x)$ は

$$f(x) = G(x) - G\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

と表せるから、これの導関数は

$$f'(x) = G'(x) = g(x) = (1 - 2\sin x)\sin x$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = (1 - 2\sin x)\sin x$$

(2)

(1)の結果より、 $f'(x) = (1 - 2\sin x)\sin x$ であるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$-\frac{\pi}{4}$	...	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	

ここで、 C を積分定数とすると、 $G(t)$ は

$$\begin{aligned} G(t) &= \int g(t) dt \\ &= \int (1 - 2\sin t)\sin t dt \\ &= \int \left(\sin t - 2 \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \sin 2t - \cos t - t + C \end{aligned}$$

と表せるから、極小値、極大値はそれぞれ

$$\begin{aligned} f(0) &= G(0) - G\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot 0 - 1 - 0 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot (-1) - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{2} - \pi - 2}{4} \\ f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= G\left(\frac{\pi}{6}\right) - G\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot (-1) - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{6\sqrt{2} - 3\sqrt{3} - 5\pi + 6}{12} \end{aligned}$$

と求まる。よって、 $f(x)$ は $x=0$ で極小値 $\frac{2\sqrt{2} - \pi - 2}{4}$ 、 $x=\frac{\pi}{6}$ で極大値 $\frac{6\sqrt{2} - 3\sqrt{3} - 5\pi + 6}{12}$ をもつことがわかる。

$$(\text{答}) \quad \text{極小値: } \frac{2\sqrt{2} - \pi - 2}{4} \quad (x=0), \quad \text{極大値: } \frac{6\sqrt{2} - 3\sqrt{3} - 5\pi + 6}{12} \quad \left(x=\frac{\pi}{6}\right)$$

(3)

$f(x)$ の 2 階導関数は

$$f''(x) = g'(x) = (1 - 2\sin x)\cos x + (-2\cos x)\sin x = (1 - 4\sin x)\cos x$$

となる。ここで、 $x=a$ $\left(-\frac{\pi}{4} < a < \frac{\pi}{4}\right)$ で曲線 $y=f(x)$ が変曲点をもつためには

$$f''(a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin a = \frac{1}{4} \quad (\because -\frac{\pi}{4} < a < \frac{\pi}{4} \text{ の範囲で } \cos a > 0)$$

となることが必要であり、区間 $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ では $\sin x$ は単調増加関数であるから $x=a$ の前後で $f''(x)$ は符号変化するため、十分性も満たす。よって、 a は

$$\sin a = \frac{1}{4} \quad \text{かつ} \quad -\frac{\pi}{4} < a < \frac{\pi}{4}$$

を満たす唯一の実数であり、曲線 $y=f(x)$ の点 $A(a, f(a))$ における接線の傾きは

$$f'(a) = g(a) = (1 - 2\sin a)\sin a = \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{8}$$

〔Ⅱ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
$\frac{r^2 z}{x^2 + y^2 + z^2}$	$Q\left(0, 0, \frac{r^2}{a}\right)$	$R\left(0, \sqrt{r^2 - a^2}, a\right)$	0	$\frac{r^2}{b}$	$\left(0, 0, \frac{r^2}{2b}\right)$	$\frac{r^2}{2b}$

〔解説〕

$\overline{OP} \parallel \overline{OQ}$ より、実数 k を用いて、 $\overline{OQ}$ は

$$\begin{aligned}\overline{OQ} &= k\overline{OP} \\ &= k(x, y, z)\end{aligned}$$

とおくことができる。ここで、点 P は原点とは異なるから

$$x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$$

であるため、

$$\begin{aligned}|\overline{OP}| |\overline{OQ}| &= r^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot |k| \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &= r^2 \\ \Leftrightarrow |k| &= \frac{r^2}{x^2 + y^2 + z^2}\end{aligned}$$

を得る。また、 $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} > 0$ より

$$\begin{aligned}\overline{OP} \cdot \overline{OQ} &> 0 \\ \Leftrightarrow k(x^2 + y^2 + z^2) &> 0 \\ \Leftrightarrow k &> 0 \\ \therefore k &= \frac{r^2}{x^2 + y^2 + z^2}\end{aligned}$$

となることがわかるから、 Q の z 座標は

$$kz = \frac{r^2 z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

と表されることがわかる。

以上の考察より、 P の座標が $(0, 0, a)$ のとき、 $\overline{OQ}$ は

$$\begin{aligned}\overline{OQ} &= k\overline{OP} \\ &= \frac{r^2}{a^2}(0, 0, a)\end{aligned}$$

となるから、 Q の座標は $Q\left(0, 0, \frac{r^2}{a}\right)$ である。点 R の座標は、正の実数 p を用いて $R(0, p, a)$

とおくことができ、原点からの距離が r であることから

$$\begin{aligned}\sqrt{0^2 + p^2 + a^2} &= r \\ \therefore p &= \sqrt{r^2 - a^2} \quad (\because p > 0)\end{aligned}$$

より、 $R\left(0, \sqrt{r^2 - a^2}, a\right)$ であることがわかる。このとき、内積 $\overline{OR} \cdot \overline{QR}$ の値は

$$\begin{aligned}\overline{OR} \cdot \overline{QR} &= \left(0, \sqrt{r^2 - a^2}, a\right) \cdot \left(0, \sqrt{r^2 - a^2}, a - \frac{r^2}{a}\right) \\ &= (r^2 - a^2) + a\left(a - \frac{r^2}{a}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。

また、 P が xy 平面に平行で点 $(0, 0, b)$ を通る平面上の点であるとき、点 P の座標は、実数 s, t を用いて

$$P(s, t, b)$$

とおくことができる。このとき、 $\overline{OQ}$ は

$$\begin{aligned}\overline{OQ} &= k\overline{OP} \\ &= \frac{r^2}{s^2 + t^2 + b^2}(s, t, b)\end{aligned}$$

となるから、 $Q(X, Y, Z)$ について、等式

$$\begin{aligned}X^2 + Y^2 + Z^2 &= \left(\frac{r^2}{s^2 + t^2 + b^2}\right)^2 (s^2 + t^2 + b^2) \\ &= \frac{r^2}{b} \cdot \frac{r^2 b}{s^2 + t^2 + b^2} \quad (\because b > 0) \\ &= \frac{r^2}{b} Z\end{aligned}$$

が成り立つ。この式を変形すると

$$\begin{aligned}X^2 + Y^2 + Z^2 &= \frac{r^2}{b} Z \\ \Leftrightarrow X^2 + Y^2 + \left(Z - \frac{r^2}{2b}\right)^2 &= \left(\frac{r^2}{2b}\right)^2\end{aligned}$$

となるから、 Q は中心が $\left(0, 0, \frac{r^2}{2b}\right)$ 、半径が $\frac{r^2}{2b} (> 0)$ の球面上の点となることがわかる。

〔Ⅲ〕

(1)

関数 $f(x)$ の導関数は、商の微分公式より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \log x}{x^2} \\ &= \frac{1 - \log x}{x^2} \end{aligned}$$

と計算できるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

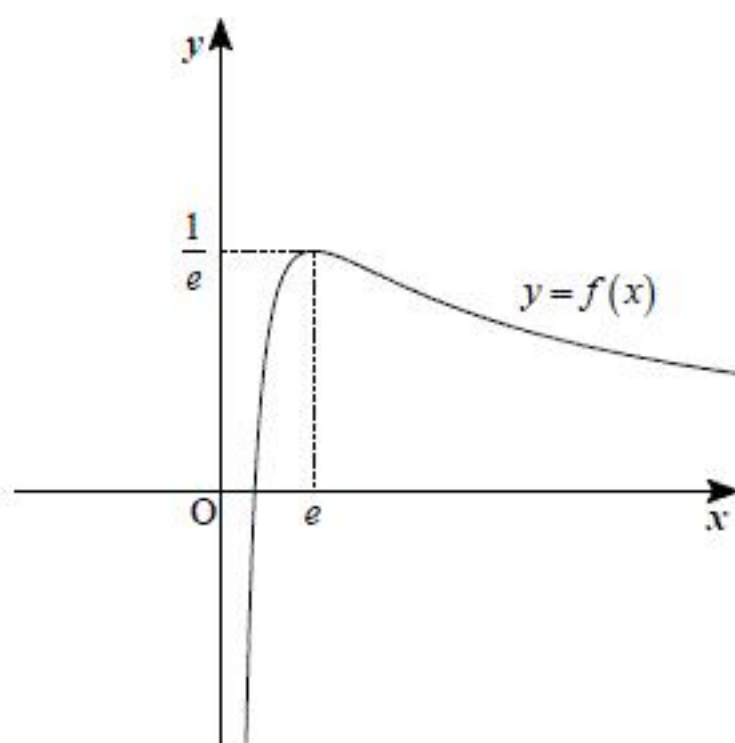
x	0	...	e	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			$\frac{1}{e}$	

よって、 $f(x)$ は $x=e$ のとき極大値 $\frac{1}{e}$ をとることがわかる。

(答) 極大値: $\frac{1}{e}$ ($x=e$), 極小値: なし

(2)

(1)の結果より、曲線 $y=f(x)$ のグラフは以下の図のようになる。ここで、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=0$ より、直線 $y=0$ が漸近線であることに注意する。



(答) 前図

(3)

(1), (2)より、 $f(x)$ は $e < x$ で単調減少関数であることがわかる。よって、 $e < \pi$ であることから、 e^π と π^e の大小は

$$\begin{aligned} \frac{\log e}{e} &> \frac{\log \pi}{\pi} \\ \Leftrightarrow \pi \log e &> e \log \pi \\ \Leftrightarrow e^\pi &> \pi^e \end{aligned}$$

であることがわかる。

(答) $e^\pi > \pi^e$

【Ⅳ】

【解答】

①	②	③	④	⑤	⑥
8	$2n-1$	$\frac{3}{2}\pi$	-2	$\frac{5}{12}\pi$	14

【解説】

(1) $(2^x+2^{-x-1})^2=2^{2x}+2\cdot 2^x\cdot 2^{-x-1}+2^{-2x-2}$
 $=4^x+4^{-x-1}+1$
より、 $2^x+2^{-x-1}=3$ のとき
 $4^x+4^{-x-1}=(2^x+2^{-x-1})^2-1$
 $=8$
である。

(2) $a_1=1$ は0以上の整数であり、 $k\geq 1$ のとき a_k が0以上の整数であると仮定すると
 $a_{k+1}=k-1$ または $a_{k+1}=k+1$ ・・・①
となるから、 a_{k+1} も0以上の整数となる。よって、帰納的に、すべての自然数 n に対し a_n は0以上の整数であることがわかる。また、①より $n\geq 2$ のとき a_n の偶奇は n と一致することがわかり、これは $n=1$ のときも成り立つ。したがって、 $n\geq 2$ のとき b_n は n を用いて
 $b_n=a_{2n-1}$
 $= (2n-2)+(-1)^{a_{2n-2}}$
 $= 2n-2+(-1)^{2n-2}$
 $= 2n-1$
と表され、これは $n=1$ のときも成立する。

(3) 題意で与えられた関数は
 $4\sin\theta+\frac{1}{\sin\theta+\frac{3}{2}}=4\left(\sin\theta+\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{\sin\theta+\frac{3}{2}}-6$
と変形できる。ここで、 $\sin\theta+\frac{3}{2}>0$ であるから、相加平均、相乗平均に関する不等式より
 $4\left(\sin\theta+\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{\sin\theta+\frac{3}{2}}\geq 2\sqrt{4\left(\sin\theta+\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sin\theta+\frac{3}{2}}}=4$
であり、等号成立は
 $4\left(\sin\theta+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{\sin\theta+\frac{3}{2}}$
 $\Leftrightarrow \sin\theta+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\left(\because \sin\theta+\frac{3}{2}>0\right)$
 $\Leftrightarrow \sin\theta=-1$
 $\Leftrightarrow \theta=\frac{3}{2}\pi\ (\because 0\leq \theta<2\pi)$
のときである。よって、この関数は $\theta=\frac{3}{2}\pi$ のとき、最小値 -2 をとることがわかる。

(4) まず、一般に極方程式 $r\sin\theta=a$ (a は定数) は xy 平面上において直線 $y=a$ を表すから、この直線と x 軸のなす偏角は0である。ここで、極方程式 $r\sin(\theta-\alpha)=a$ が表す直線は極方程式 $r\sin\theta=a$ が表す直線を、原点を中心に $+\alpha$ だけ回転したものであるから、この直線と x 軸のなす偏角は α であることがわかる。
題意で与えられた2つの直線の極方程式は、三角関数の合成より、それぞれ
 $r(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)=4$
 $\Leftrightarrow r\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\cos\theta\right)=2$
 $\Leftrightarrow r\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=2$
 $r(\cos\theta-\sin\theta)=2$
 $\Leftrightarrow r\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos\theta\right)=-\sqrt{2}$
 $\Leftrightarrow r\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$
と変形できるから、 x 軸のなす偏角はそれぞれ $-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ である。したがって、これら2つの直線のなす角は
 $\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{12}\pi\ (\because 0\leq \frac{5}{12}\pi\leq \frac{\pi}{2})$
であることがわかる。

(5) $x(1+x)^n$ を展開すると、二項定理より
 $x(1+x)^n=\sum_{k=0}^nC_kx^{k+1}$
となるから、上式の両辺を微分すると
 $(1+x)^n+nx(1+x)^{n-1}=\sum_{k=0}^n(k+1)C_kx^k$
となる。したがって、両辺に $x=1$ を代入すると
 $2^n+n2^{n-1}=\sum_{k=0}^n(k+1)C_k$
が成り立つから、 $\sum_{k=0}^n(k+1)C_k=2^{17}$ を満たす自然数 n の値は
 $2^n+n2^{n-1}=2^{17}$
 $\Leftrightarrow (n+2)2^{n-1}=2^{17}$
 $\Leftrightarrow n+2=2^{18-n}$
 $\therefore n=14$
であることがわかる。