

〔 I 〕

〔解答〕

$$\textcircled{1} \quad 3 \quad \textcircled{2} \quad -1 \quad \textcircled{3} \quad 55k \quad \textcircled{4} \quad -1 \quad \textcircled{5} \quad 6 \quad \textcircled{6} \quad 5\sqrt{6}$$

〔解説〕

(1)

$$(x+y)(y+z)(z+x) = x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2 + 2xyz$$

より, $(x+y+z)^3$ は

$$\begin{aligned} (x+y+z)^3 &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx) \\ &= x^3+y^3+z^3+3(x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2)+6xyz \\ &= x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x) \end{aligned}$$

と表せるため, $\alpha=3$ である。また,

$$(x+y+z)(xy+yz+zx) = x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2+3xyz$$

より, $(x+y)(y+z)(z+x)$ は

$$(x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz$$

と表せるため, $\beta=-1$ である。したがって, 上の結果から

$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3\{(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz\} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。

$$x+y+z=k$$

とおくと, x, y, z が

$$x^3+y^3+z^3=0$$

$$xy+yz+zx=-\frac{55}{6}$$

$$xyz=\frac{19}{2}$$

を満たすとき, ①より実数 k は

$$\begin{aligned} k^3 &= 0+3\left\{k\cdot\left(-\frac{55}{6}\right)-\frac{19}{2}\right\} \\ \Leftrightarrow 2k^3+55k+57 &= 0 \\ \Leftrightarrow (k+1)(2k^2-2k+57) &= 0 \end{aligned}$$

を満たす。

$$\begin{aligned} 2k^2-2k+57 &= 2\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{113}{2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

より $k=-1$ であるから, 解と係数の関係より x, y, z は3次方程式

$$t^3+t^2-\frac{55}{6}t-\frac{19}{2}=0$$

の解である。これを解くと

$$\begin{aligned} t^3+t^2-\frac{55}{6}t-\frac{19}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (t+3)\left(t^2-2t-\frac{19}{6}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= -3, \frac{6\pm 5\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

となるので, $x=-3$ のとき,

$$y=\frac{6\pm 5\sqrt{6}}{6}, z=\frac{6\mp 5\sqrt{6}}{6} \quad (\text{複号同順})$$

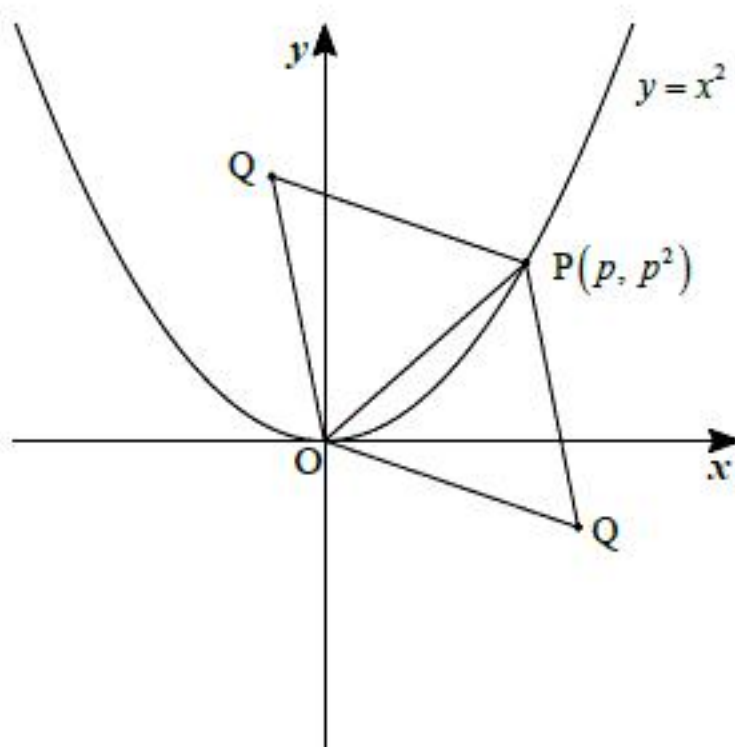
である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

①	$p^4 + p^2$
②	$\frac{1}{2}$
③	$-\frac{1}{p}$
④	$\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}$
⑤	$\frac{1}{2}(p \pm \sqrt{3}p^2)$
⑥	$\frac{1}{2}(p^2 \mp \sqrt{3}p)$
⑦	$p > \frac{1}{\sqrt{3}}$

〔解説〕



$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p \\ p^2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

であるから、 $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OQ}|$ より、両辺 2 乗して、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}|^2 &= |\overrightarrow{OQ}|^2 \\ \Leftrightarrow p^2 + p^4 &= a^2 + b^2 \\ \therefore a^2 + b^2 &= p^4 + p^2 \end{aligned} \quad \cdots (1)$$

が成り立つ。また、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| \cos \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| \end{aligned}$$

と表せるので、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p \\ p^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \sqrt{p^2 + p^4} \sqrt{a^2 + b^2} \\ \Leftrightarrow pa + p^2b &= \frac{1}{2} (p^4 + p^2) \quad (\because (1)) \\ \therefore b &= -\frac{1}{p}a + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2} \quad (\because p > 0) \end{aligned} \quad \cdots (2)$$

が成り立つ。(2)を(1)に代入すると、

$$a^2 + \left(-\frac{1}{p}a + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2} \right)^2 = p^4 + p^2$$

となるので、 $p > 0$ より、両辺に p^2 をかけて、

$$\begin{aligned} p^2a^2 + \left(-a^2 + \frac{1}{2}p^3 + \frac{1}{2}p \right)^2 &= p^6 + p^4 \\ \Leftrightarrow (p^2 + 1)a^2 - p(p^2 + 1)a - \frac{3}{4}p^6 - \frac{1}{2}p^4 + \frac{1}{4}p^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (p^2 + 1)a^2 - p(p^2 + 1)a - \frac{1}{4}p^2(3p^2 - 1)(p^2 + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4a^2 - 4pa - p^2(3p^2 - 1) &= 0 \quad (\because p^2 + 1 > 0) \\ \therefore a &= \frac{2p \pm \sqrt{4p^2 + 4p^2(3p^2 - 1)}}{4} \\ &= \frac{1}{2}(p \pm \sqrt{3}p^2) \end{aligned}$$

と求まる。これを(1)に代入して、

$$b = \frac{1}{2}(p^2 \mp \sqrt{3}p)$$

となる。以上より、

$$(a, b) = \left(\frac{1}{2}(p \pm \sqrt{3}p^2), \frac{1}{2}(p^2 \mp \sqrt{3}p) \right)$$

である。点 Q が第 2 象限に存在するとき、

$$a < 0 \text{ かつ } b > 0$$

が成り立つ。 $p > 0$ より、

$$\frac{1}{2}(p + \sqrt{3}p^2) > 0$$

であるので、

$$(a, b) = \left(\frac{1}{2}(p - \sqrt{3}p^2), \frac{1}{2}(p^2 + \sqrt{3}p) \right)$$

のときを考える。このとき、 $p > 0$ より、 $b > 0$ は常に成り立つので、

$$\begin{aligned} a &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(p - \sqrt{3}p^2) &< 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{3}p - 1 &> 0 \quad (\because p > 0) \\ \therefore p &> \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

のとき、条件を満たす 2 点のうち一方の点が第 2 象限に存在する。

〔Ⅲ〕

(1)

点 P の座標を $P(x, y)$ とし, 求める軌跡を W とおくと

$$P(x, y) \in W \Leftrightarrow AP:BP=1:2$$

$$\Leftrightarrow 2AP=BP$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-8)^2+(y+4)^2}$$

$$\Rightarrow 4(x-2)^2+4(y+1)^2=(x-8)^2+(y+4)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=20$$

と変形できるから, 条件を満たす点 P の軌跡の方程式は

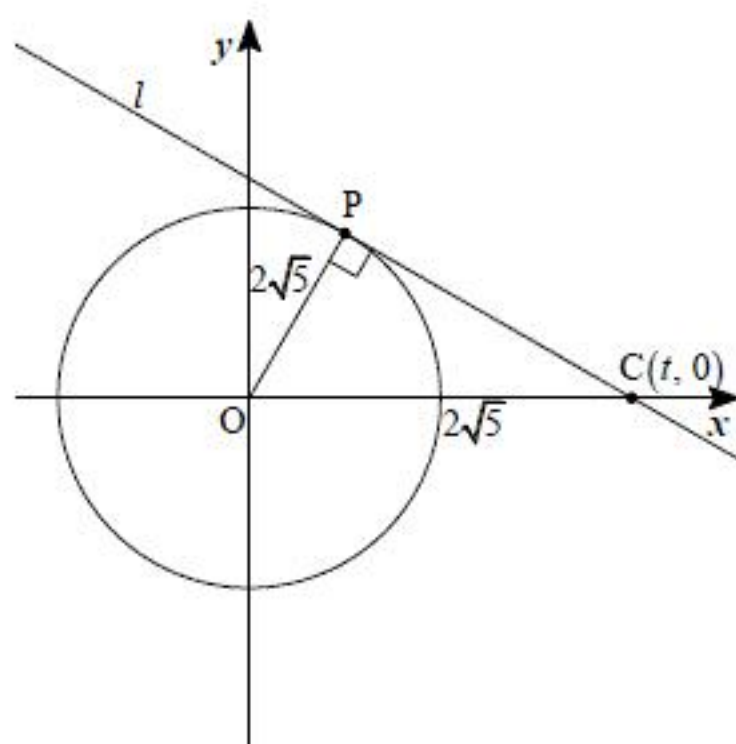
$$x^2+y^2=20$$

である。

$$(\text{答}) \quad x^2+y^2=20$$

(2)

(1)で求めた軌跡の方程式は, 中心が原点で半径が $2\sqrt{5}$ の円を表す。



よって辺 OP の長さは $OP=2\sqrt{5}$ であり, 直線 OP と直線 PC は直交することから $\angle OPC=90^\circ$ である。ここで, 点 C の座標を実数 t を用いて $C(t, 0)$ ($|t| \geq 2\sqrt{5}$) とおくと, 辺 OC の長さは $OC=|t|$ であるから, $\triangle OPC$ に三平方の定理を用いることにより, 辺 PC の長さは

$$\begin{aligned} PC &= \sqrt{OC^2 - OP^2} \\ &= \sqrt{t^2 - 20} \end{aligned}$$

と表せることがわかる。よって, このとき $\triangle OPC$ の面積 S は, t を用いて

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot OP \cdot PC \\ &= \sqrt{5t^2 - 100} \end{aligned}$$

と表せるから, $S=10\sqrt{3}$ となるような t の値は

$$\begin{aligned} S &= 10\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \sqrt{5t^2 - 100} &= \sqrt{300} \\ \Leftrightarrow t^2 &= 80 \\ \therefore t &= \pm 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

と求まる。したがって, 求める点 C の座標は

$$(4\sqrt{5}, 0), (-4\sqrt{5}, 0)$$

である。

$$(\text{答}) \quad (4\sqrt{5}, 0), (-4\sqrt{5}, 0)$$