

〔Ⅰ〕

(1)

題意で与えられた関係式は

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{PA} + k\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow -3\overrightarrow{AP} + k(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (k+4)\overrightarrow{AP} &= k\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

と変形できるから、 $k > 0$ のとき、 $\overrightarrow{AP}$ は $k, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ を用いて

$$\overrightarrow{AP} = \frac{k}{k+4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{k+4}\overrightarrow{AC}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AP} = \frac{k}{k+4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{k+4}\overrightarrow{AC}$$

(2)

まず、3 点 A, B, C は同一直線上にないから、 $\triangle ABC$ を成すことに注意する。(1)の結果より、 $k > 0$ のもとで、 $\overrightarrow{AP}$ は $k, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \frac{k}{k+4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{k+4}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{k+1}{k+4} \left(\frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AC} \right) \end{aligned}$$

と表せる。ここで、点 Q を

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AC}$$

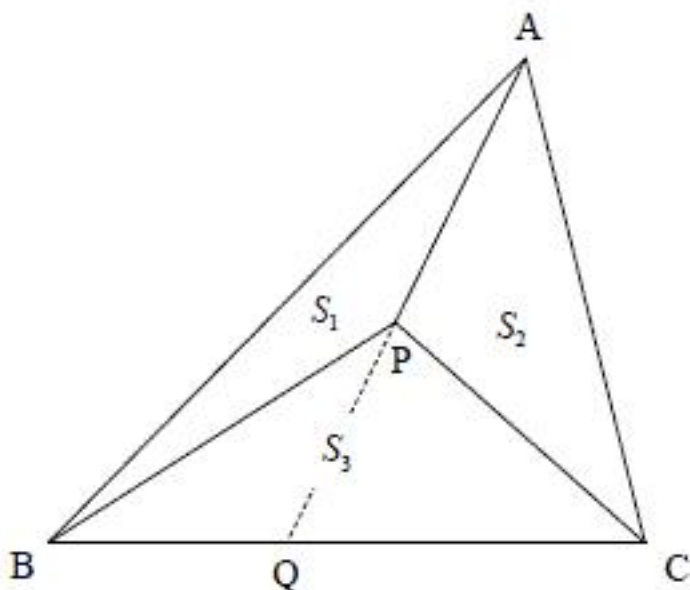
を満たすようにとると、 $k > 0$ より、これは線分 BC を $1:k$ に内分する点であり、 $\overrightarrow{AP}$ は $k, \overrightarrow{AQ}$ を用いて

$$\overrightarrow{AP} = \frac{k+1}{k+4}\overrightarrow{AQ}$$

と表せる。よって、 $0 < \frac{k+1}{k+4} < 1$ であることから、点 P は線分 AQ 上の点であり、 $\triangle ABC$ の内部にあることが示された。

(証明終)

(3)



$\triangle ABC$ の面積を S とし、 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PAC$ 、 $\triangle PBC$ の面積をそれぞれ S_1, S_2, S_3 とおくと、(2) における考察より

$$\begin{aligned} BQ:QC &= 1:k \\ AP:AQ &= (k+1):(k+4) \Leftrightarrow AP:PQ = (k+1):3 \end{aligned}$$

であることから、 S_1, S_2, S_3 はそれぞれ S を用いて

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{BQ}{BC} \cdot \frac{AP}{AQ} \cdot S \\ &= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k+4} \cdot S \\ &= \frac{1}{k+4} S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{QC}{BC} \cdot \frac{AP}{AQ} \cdot S \\ &= \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k+4} \cdot S \\ &= \frac{k}{k+4} S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{PQ}{AQ} \cdot S \\ &= \frac{3}{k+4} S \end{aligned}$$

と表せる。 $\triangle PAB$ と $\triangle PAC$ の面積が等しいとき

$$\begin{aligned} S_1 &= S_2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{k+4} S &= \frac{k}{k+4} S \\ \Leftrightarrow k &= 1 \end{aligned}$$

であり、このとき、 $\triangle PAB$ と $\triangle PBC$ の面積の比は

$$S_1:S_3 = \frac{1}{1+4} S : \frac{3}{1+4} S = 1:3$$

である。

(答) 1:3

〔Ⅱ〕

(1)

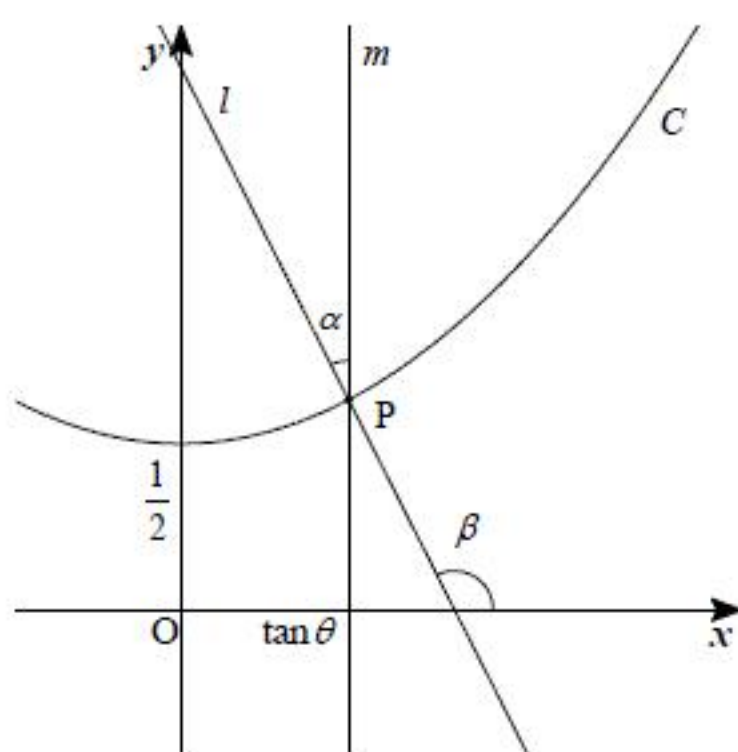
放物線 $C: y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ の式を x で微分すると、 $y' = x$ となるから、点 P における放物線 C の接線の傾きは $\tan \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ である。よって、直線 l は点 P における放物線 C の法線であるから、この傾きは $-\frac{1}{\tan \theta}$ である。以上より、直線 l の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{\tan \theta}(x - \tan \theta) + \frac{1}{2}\tan^2 \theta + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{\tan \theta}x + \frac{1}{2}\tan^2 \theta + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad y = -\frac{1}{\tan \theta}x + \frac{1}{2}\tan^2 \theta + \frac{3}{2}$$

(2)



上図のように、 x 軸と直線 l のなす角のうち、大きい方を $\beta \left(\frac{\pi}{2} < \beta < \pi \right)$ とおくと

$$\alpha = \beta - \frac{\pi}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立ち、また、(1)の結果より直線 l の傾きは

$$-\frac{1}{\tan \theta} = \tan \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)$$

であるから、 β は θ を用いて

$$\beta = \theta + \frac{\pi}{2} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi \right) \quad \dots \textcircled{2}$$

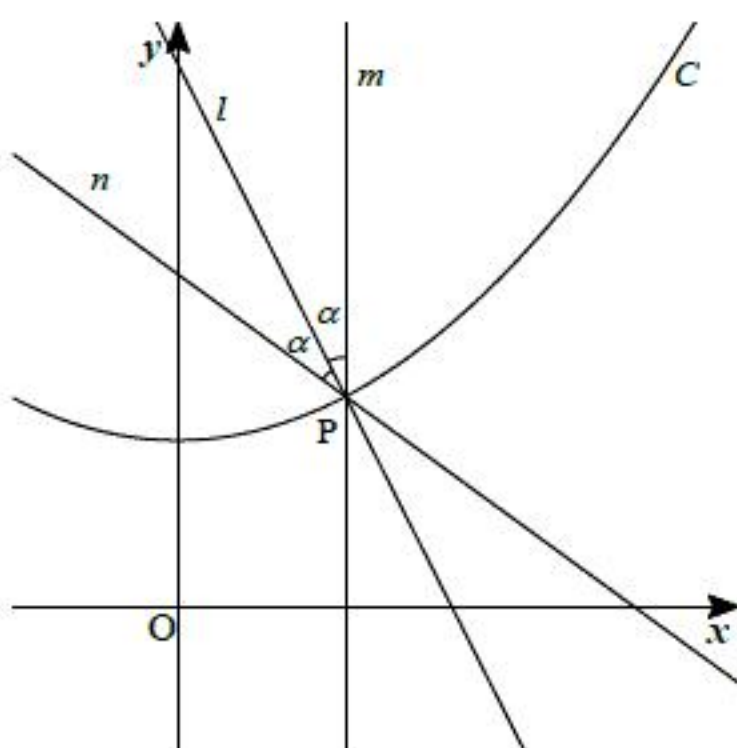
と表せる。よって、①、②より、 α は θ を用いて

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\pi}{2} \\ &= \theta \end{aligned}$$

と表せることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \alpha = \theta$$

(3)



上図のように、直線 n は直線 m について、点 P を中心に $+2\alpha$ 回転した直線であるから、直線 n の傾きは、 θ の範囲 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ に注意して

$$\tan \left(2\theta + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\tan \theta + \tan \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)}{1 - \tan \theta \cdot \tan \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{\tan \theta - \frac{1}{\tan \theta}}{1 - \tan \theta \cdot \left(-\frac{1}{\tan \theta} \right)} = \frac{\tan^2 \theta - 1}{2 \tan \theta}$$

と表せる。よって、直線 n の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{\tan^2 \theta - 1}{2 \tan \theta}(x - \tan \theta) + \frac{1}{2}\tan^2 \theta + \frac{1}{2} \\ &= \frac{\tan^2 \theta - 1}{2 \tan \theta}x + 1 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{\tan^2 \theta - 1}{2 \tan \theta}x + 1$$

(4)

(3)で求めた直線 n の方程式に $(x, y) = (0, 1)$ を代入すると、 θ の値に関わらず成立することがわかる。したがって、直線 n は θ の値にかかわらず、定点 $(0, 1)$ を通ることがわかる。

(証明終)

〔Ⅲ〕

【解答】

(1)	①
	$\frac{11}{24}$
(2)	②
	$\frac{3}{4}$
(3)	③
	$\frac{1}{4}$
(4)	④
	$\frac{35}{192}$

【解説】

(1)

3人がそれぞれ1回実験を行ったとき、A君のみ、B君のみ、C君のみが実験に成功する確率は、それぞれ

$$\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right), \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right), \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{4}$$

であるから、1人だけが実験に成功する確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{24}$$

と求まる。

(2)

3人がそれぞれ1回実験を行ったとき、3人とも実験に成功しない確率は

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

であるから、少なくとも1人が実験に成功する確率はこの余事象の確率であり、

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

と求まる。

(3)

3人がそれぞれ1回実験を行ったとき、3人とも実験に成功する確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

である。ここで、少なくとも1人が実験に成功する確率は、1人だけが成功する確率と2人だけが成功する確率、3人とも成功する確率の和であるから、2人だけ成功する確率は(1)、(2)の結果より

$$\frac{3}{4} - \frac{11}{24} - \frac{1}{24} = \frac{1}{4}$$

と求まる。

(4)

2回目までの実験で成功する確率は、2回目までの実験で成功しない確率の余事象であるから、A君、B君、C君が2回目までの実験で成功する確率は、それぞれ

$$1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}, 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}, 1 - \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$$

である。したがって、2回目までの実験で全員が成功する確率は

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{16} = \frac{35}{192}$$

と求まる。

【IV】

【解答】

(1)	①	②
	$-\frac{b^2-2c}{c^2}$	$\frac{1}{c^2}$
(2)	③	④
	$b(b^2-3c)$	c^3
(3)	⑤	⑥
	$-b$	$-c$
(4)	⑦	⑧
	-1364	-1

【解説】

(1)

α, β は2次方程式 $x^2+bx+c=0$ の解であるから、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-b \\ \alpha\beta=c \end{cases} \qquad \dots \textcircled{1}$$

を満たす。よって、 $\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}$ を解にもつ2次方程式のうち、 x^2 の係数が1であるものは

$$\begin{aligned} & \left(x-\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(x-\frac{1}{\beta^2}\right)=0 \\ \Leftrightarrow & x^2-\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)x+\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{\beta^2}=0 \\ \Leftrightarrow & x^2-\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}x+\frac{1}{(\alpha\beta)^2}=0 \\ \Leftrightarrow & x^2-\frac{b^2-2c}{c^2}x+\frac{1}{c^2}=0 \end{aligned}$$

である。

(2)

(1)と同様にして、 α^3, β^3 を解にもつ2次方程式のうち、 x^2 の係数が1であるものは

$$\begin{aligned} & (x-\alpha^3)(x-\beta^3)=0 \\ \Leftrightarrow & x^2-(\alpha^3+\beta^3)x+\alpha^3\beta^3=0 \\ \Leftrightarrow & x^2-\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}x+(\alpha\beta)^3=0 \\ \Leftrightarrow & x^2+b(b^2-3c)x+c^3=0 \end{aligned}$$

である。

(3)

α^n, β^n が2次方程式 $x^2+p_nx+q_n=0$ の解であるとき、解と係数の関係より

$$\begin{cases} p_n=-(\alpha^n+\beta^n) \\ q_n=\alpha^n\beta^n \end{cases} \qquad \dots \textcircled{2}$$

であるから、 p_{n+2} は p_{n+1}, p_n を用いて

$$\begin{aligned} p_{n+2} &= -(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}) \\ &= -\{(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-\alpha\beta(\alpha^n+\beta^n)\} \\ &= -bp_{n+1}-cp_n \end{aligned}$$

と表せる。

(4)

$\alpha=2+\sqrt{5}, \beta=2-\sqrt{5}$ のとき、①より

$$\begin{aligned} b &= -(\alpha+\beta)=-4 \\ c &= \alpha\beta=-1 \end{aligned}$$

であるから、(3)における p_1, p_2 の値は

$$\begin{aligned} p_1 &= b=-4 \\ p_2 &= -(\alpha^2+\beta^2)=-\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}=-b^2+2c=-18 \end{aligned}$$

である。よって、(3)の結果より、 p_3, p_4, p_5 の値が順に

$$\begin{aligned} p_3 &= 4(-18)+(-4)=-76 \\ p_4 &= 4(-76)+(-18)=-322 \\ p_5 &= 4(-322)+(-76)=-1364 \end{aligned}$$

と求まる。また、②より

$$q_n=\alpha^n\beta^n=c^n=(-1)^n$$

となるから

$$q_5=(-1)^5=-1$$

である。