

2015 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 60 分です。
5. 問題は 3 ページで大問 3 問です。余白は計算用紙です。

〔 I 〕 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1}^3 = 2^{10} a_n^4, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

によって定められている。次の問いに答えよ。

- (1) $b_n = \log_2 a_n$ とおく。数列 $\{b_n\}$ が満たす漸化式を求めよ。
- (2) 一般項 b_n を求めよ。
- (3) $a_n < 2^{2015}$ となる最大の自然数 n を求めよ。ただし、 $\log_2 3 = 1.585$,
 $\log_2 5 = 2.322$ とする。

〔Ⅱ〕 a, b を異なる正の定数とする。2つの放物線

$$C_1: y = x^2 - 2ax + b, \quad C_2: y = x^2 - 2bx + a$$

を考える。次の をうめよ。

(1) C_1 と C_2 は共有点を1つもつ。共有点の x 座標を求めると、 ① であ

り、 y 座標を a, b を用いて表すと、 ② である。

(2) (1)の共有点を通る直線で、傾きが a である直線を l とする。直線 l の式を求めると、 $y =$ ③ である。このとき、 l と C_1 との共有点で(1)の共有点以外の点の座標は、(④ , ⑤) である。

(3) (2)の直線 l と C_1 とで囲まれる図形の面積を S とすると、 $S = \frac{\text{ ⑥}}{6}$ である。

〔Ⅲ〕 1, 2, 3, 4, 5 と書かれたカードが 1 枚ずつ箱に入っている。ここで、カードを戻すことなく 1 枚ずつ引き、引いた番号を順番に a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 とする。2 回目以降に引いた番号がその直前に引いた番号より初めて大きくなった場合に、それらの番号の差を得点とする。例えば、 $a_1 = 5, a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = 3, a_5 = 2$ のときは、得点は $3 - 1 = 2$ となり、 $a_1 = 3, a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = 5, a_5 = 2$ のときは、得点は $4 - 3 = 1$ となる。また、2 回目以降に引いた番号が前の番号より大きくなることのない場合の得点は 0 とする。次の をうめよ。

- (1) 得点が 0 となるためには、 $a_5 =$ ① である。
- (2) 得点が 0 となる確率は ② である。
- (3) 得点が 4 で、 $a_1 = 1, a_2 = 5$ となる確率は ③ である。
- (4) 得点が 4 で、 $a_4 = 1, a_5 = 5$ となる確率は ④ である。
- (5) 得点が 4 となる確率は ⑤ である。
- (6) 得点が 4 で、 a_5 が偶数となる確率は ⑥ である。

(以上)