

2015 年度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は100分です。
5. 問題は4ページで大問4問です。余白は計算用紙です。
6. 解答用紙は両面になっています。

〔 I 〕 数列 $\{a_n\}$ が条件

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = (n+2)a_n + n! \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定められている。次の問いに答えよ。

(1) $b_n = \frac{a_n}{(n+1)!}$ とおくとき、数列 $\{b_n\}$ の漸化式を求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 和 $\sum_{k=1}^n 2^{k-1}a_k$ を求めよ。

〔Ⅱ〕 次の をうめよ。

n を正の整数とする。第 1 象限において、点 $P(x, y)$ が曲線 $x^2 + n^2 y^2 = 2$ 上を動くとき、 xy の最大値 a_n を n を用いて表すと、 $a_n =$ ① である。

また、 xy が最大となる P の座標を (x_n, y_n) とすると、

$$(x_n, y_n) = (\text{ ② } , \text{ ③ })$$

である。さらに、曲線 $x^2 + n^2 y^2 = 2$ の点 (x_n, y_n) における接線の方程式は $y =$ ④ , 法線の方程式は $y =$ ⑤ である。この接線と x 軸、および y 軸で囲まれた三角形の面積 S_n を n を用いて表すと、 $S_n =$ ⑥ である。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{k=1}^n k a_{n+k} \right) S_n \right\} = \text{ ⑦ }$$

である。

〔Ⅲ〕 関数 $f(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の導関数を求めよ。さらに $f(x)$ の極値を求めよ。
- (2) $f(x)$ の第 2 次導関数を求めよ。さらに曲線 $y = f(x)$ の変曲点の座標を求めよ。
- (3) 不等式

$$x^2 f(x) \leq 3\sqrt{3} e^{-\frac{3}{2}}$$

が成り立つことを示せ。

- (4) $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a x^2 f(x) dx$ の値を求めよ。

〔IV〕 次の をうめよ。

- (1) 虚数 α が $\alpha^3 = -1$ を満たすとする。実数 p, q に対して、

$$\frac{1}{\alpha^{10}} + \frac{1}{\alpha^9} + \frac{p}{\alpha^8} + \frac{q}{\alpha^7} = 0$$

が成り立つとき、 $p =$ ① $, q =$ ② $である。$

- (2) 等式

$$\log 2 = \log \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} + \log \frac{1 + \frac{1}{y}}{1 - \frac{1}{y}}$$

および不等式 $x \leq y$ を満たす自然数 x, y の組をすべて求めると、

$(x, y) =$ ③ $である。$

- (3) s は $0 < s < 1$ を満たす定数とし、 P, Q は x 座標がそれぞれ $t, t+1$ である放物線 $y = x^2$ 上の点とする。 t がすべての実数値をとって変化するとき、線分 PQ を $s : (1-s)$ に内分する点 R の軌跡は曲線 $y =$ ④ $である。$

- (4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2 \cos x)}{x - \frac{\pi}{2}}$ の値は ⑤ $である。$

- (5) $a > 1$ とし、 l を 2 点 $(1, 0), (a, \log a)$ を通る直線とする。 l と曲線 $y = \log x$ で囲まれた図形の面積が 2 より大きくなるのは、 $a >$ ⑥ $のときである。$

(以上)