

〔I〕

〔解答〕

	①	②
(1)	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
	③	④
(2)	$\sqrt{1+h^2}$	$\frac{1+3h^2}{3+3h^2}$
	⑤	⑥
(3)	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

〔解説〕

(1)

△ABCにおける余弦定理より、

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC \\ &= 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

が成り立つから、 $BC > 0$ より

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{\frac{4}{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

と求まる。また、 $0 < \angle BAC < \pi$ より $\sin \angle BAC > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \sin \angle BAC &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} \\ &= \sqrt{\frac{8}{9}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

となる。したがって△ABCの面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

△ABDにおける三平方の定理より、

$$\begin{aligned} BD &= \sqrt{AB^2 + AD^2} \\ &= \sqrt{1 + h^2} \end{aligned}$$

となる。 $CD = BD = \sqrt{1 + h^2}$ であるから、△DBCにおける余弦定理より、

$$\begin{aligned} \cos \angle BDC &= \frac{BD^2 + CD^2 - BC^2}{2 \cdot BD \cdot CD} \\ &= \frac{2(1 + h^2) - \frac{4}{3}}{2(1 + h^2)} \\ &= \frac{1 + 3h^2}{3 + 3h^2} \end{aligned}$$

と求まる。

(3)

$CD = BD$ より、△DBCが正三角形となる条件は $BD = BC$ となる条件に等しい。したがって、

$$\begin{aligned} BD &= BC \\ \Leftrightarrow \sqrt{1 + h^2} &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow 1 + h^2 &= \frac{4}{3} \left(\because \sqrt{1 + h^2} > 0, \frac{2\sqrt{3}}{3} > 0 \right) \\ \Leftrightarrow h^2 &= \frac{1}{3} \\ \therefore h &= \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\because h > 0) \end{aligned}$$

となる。辺EFの中点をGとすると、△AEF、△DEFが二等辺三角形であることより

$$\angle AGF = \angle DGF = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つので、

$$\angle AGD = \theta$$

が成り立つ。△ABCと△DEFは合同であるから

$$\begin{aligned} DE &= AB = 1 \\ EF &= BC = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

が成り立つ。 $DG \perp EF$ であるから、△DGEにおける三平方の定理より、

$$\begin{aligned} DG &= \sqrt{DE^2 - GE^2} \\ &= \sqrt{DE^2 - \left(\frac{EF}{2} \right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{3}{9}} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{AD}{DG} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{6}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤
$l^2 - 2m$	$-l^3 + 3lm$	$5 - 2m$	$(1, -2), (3, 2)$	$(1, -1)$

〔解説〕

(1)

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -l \\ \alpha\beta = m \end{cases}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= l^2 - 2m \\ \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &= -l^3 + 3lm \end{aligned}$$

と計算できる。

(2)

$\alpha^2 + \beta^2 = 5$ のとき, (1) の結果より

$$\begin{aligned} l^2 - 2m &= 5 \\ \Leftrightarrow l^2 &= 2m + 5 \end{aligned} \quad \cdots \cdots \text{⑧}$$

となる。これより, 2 次方程式⑧の判別式は,

$$D = l^2 - 4m = (2m + 5) - 4m = 5 - 2m$$

と表される。これが正であることより,

$$\begin{aligned} 5 - 2m &> 0 \\ \Leftrightarrow m &< \frac{5}{2} \end{aligned}$$

を得る。また, ⑧より

$$\begin{aligned} 2m + 5 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow m &\geq -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

が得られる。これらより

$$-\frac{5}{2} \leq m < \frac{5}{2}$$

となり, m が整数のとき

$$m = -2, -1, 0, 1, 2$$

である。これらのうち, ⑧より l が自然数となるのは $m = \pm 2$ のときであるから, それぞれについて l を求めて

$$(l, m) = (1, -2), (3, 2)$$

を得る。

(3)

$\alpha^3 + \beta^3 = -4$ のとき, (1) の結果より

$$\begin{aligned} -l^3 + 3lm &= -4 \\ \Leftrightarrow l(3m - l^2) &= -4 \end{aligned} \quad \cdots \cdots \text{⑨}$$

となる。ここで l が自然数, m が整数より, $3m - l^2$ は整数となる。よって l は -4 の約数のうち正のもの, すなわち

$$l = 1, 2, 4$$

となる。以下 l の値で場合分けをする。

[1] $l = 1$ のとき

⑨より

$$\begin{aligned} 3m - 1 &= -4 \\ \therefore m &= -1 \end{aligned}$$

となる。このとき

$$D = 1 - 4 \cdot (-1) = 5 > 0$$

となり, 確かに⑧は異なる 2 つの実数解を持つので適する。

[2] $l = 2$ のとき

⑨より

$$\begin{aligned} 2(3m - 4) &= -4 \\ \therefore m &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となり, m が整数とならないから不適である。

[3] $l = 4$ のとき

⑨より

$$\begin{aligned} 4(3m - 4^2) &= -4 \\ \therefore m &= 5 \end{aligned}$$

となる。このとき

$$D = 4^2 - 4 \cdot 5 = -4 < 0$$

となり, ⑧が実数解を持たないから不適である。

以上[1]～[3]より

$$(l, m) = (1, -1)$$

と求まる。

〔Ⅲ〕

(1)

与えられた等式より、 $a \neq 0, b \neq 0$ である。 $b = ka$ を満たす複素数 k について

$$b = ka \Leftrightarrow k = \frac{b}{a} (\neq 0)$$

であるから、このとき、与えられた等式は

$$\frac{1}{k} + k + 1 = 0 \Leftrightarrow k^2 + k + 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。したがって、各値は以下のように求まる。

(i) $k^2 + k$

①を変形することで

$$k^2 + k = -1$$

であることがわかる。

(ii) k^3

①より

$$k^3 = (k-1)(k^2+k+1)+1=1$$

であることがわかる。

(iii) $3k^5 + 3k^4 - k^3 + 1$

(i), (ii)より

$$3k^5 + 3k^4 - k^3 + 1 = 3k^3(k^2+k) - k^3 + 1 = -3$$

であることがわかる。

(答) (i) $k^2 + k = -1$, (ii) $k^3 = 1$, (iii) $3k^5 + 3k^4 - k^3 + 1 = -3$

(2)

与えられた式の値は、(1)の(ii)より

$$\begin{aligned} \frac{a^{2016}}{b^{2016}} + \frac{b^{2016}}{a^{2016}} + 1 &= \left(\frac{1}{k}\right)^{2016} + k^{2016} + 1 \\ &= \left(\frac{1}{k^3}\right)^{672} + (k^3)^{672} + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{a^{2016}}{b^{2016}} + \frac{b^{2016}}{a^{2016}} + 1 = 3$