

【I】

(1)

点Rの座標を (a, b) とすると、接線 l の方程式は

$$\frac{a}{9}x + by = 1$$

と表される。接線 l は点P $(0, t)$ を通るため、

$$\frac{a}{9} \cdot 0 + b \cdot t = 1$$

$$\therefore b = \frac{1}{t}$$

となる。また、点R (a, b) は楕円 C 上の点であるため、

$$\frac{a^2}{9} + b^2 = 1$$

が成り立つ。よって、 $b = \frac{1}{t}$ より、

$$\frac{a^2}{9} + \frac{1}{t^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{9(t^2 - 1)}{t^2}$$

$$\Leftrightarrow a = \pm \frac{3\sqrt{t^2 - 1}}{t}$$

となる。ここで、 (a, b) は第1象限の点であるため、 $a > 0$ である。よって、 $a = \frac{3\sqrt{t^2 - 1}}{t}$ とな

るため、点Rの座標は $\left(\frac{3\sqrt{t^2 - 1}}{t}, \frac{1}{t}\right)$ である。以上より、接線 l の方程式は

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{3\sqrt{t^2 - 1}}{t}x + \frac{1}{t}y = 1$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{t^2 - 1}}{3}x + t$$

である。また、この方程式に $y = 0$ を代入すると、

$$0 = -\frac{\sqrt{t^2 - 1}}{3}x + t$$

$$\therefore x = \frac{3t}{\sqrt{t^2 - 1}} \quad (\because t > 1)$$

となるため、点Qの座標は $\left(\frac{3t}{\sqrt{t^2 - 1}}, 0\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad l \text{ の方程式: } y = -\frac{\sqrt{t^2 - 1}}{3}x + t, \text{ 点R} \left(\frac{3\sqrt{t^2 - 1}}{t}, \frac{1}{t} \right), \text{ 点Q} \left(\frac{3t}{\sqrt{t^2 - 1}}, 0 \right)$$

(2)

(1)より、線分PQの長さは

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{\left(0 - \frac{3t}{\sqrt{t^2 - 1}}\right)^2 + (t - 0)^2} \\ &= \sqrt{\frac{9t^2}{t^2 - 1} + t^2} \\ &= \sqrt{t^2 - 1 + \frac{9}{t^2 - 1} + 10} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $t > 1$ より、 $t^2 - 1 > 0$ 、 $\frac{9}{t^2 - 1} > 0$ であるため、相加・相乗平均に関する不等式より

$$\begin{aligned} t^2 - 1 + \frac{9}{t^2 - 1} &\geq 2\sqrt{(t^2 - 1) \cdot \frac{9}{t^2 - 1}} = 6 \\ \therefore PQ &= \sqrt{t^2 - 1 + \frac{9}{t^2 - 1} + 10} \geq \sqrt{6 + 10} = 4 \end{aligned}$$

が成り立つ。等号成立条件は

$$t^2 - 1 = \frac{9}{t^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow (t^2 - 1)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 1 = \pm 3$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 4 \quad (\because t^2 \geq 0)$$

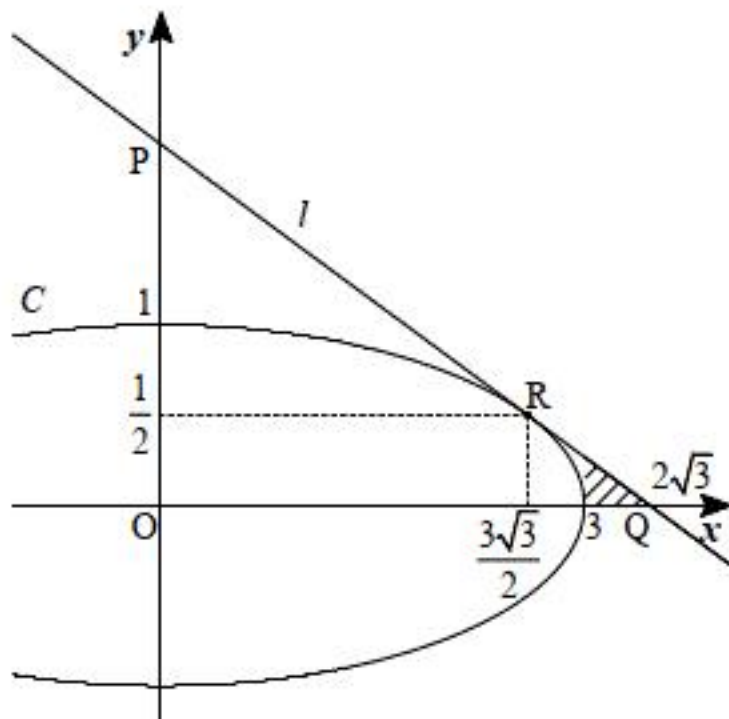
$$\therefore t = 2 \quad (\because t > 1)$$

であるため、線分PQの長さの最小値は4であり、そのときの t の値は $t = 2$ である。

(答) 線分PQの長さの最小値: 4, そのときの t の値: $t = 2$

(3)

$t = 2$ のとき、楕円 C と接線 l は下図のような位置関係になり、 x 軸と線分RQと楕円 C に囲まれた領域は下図の斜線部分である。



$y \geq 0$ において、楕円 C の方程式は $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$ となるため、求める面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \left(2\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} - \int_{\frac{3\sqrt{3}}{2}}^3 \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} - \int_{\frac{3\sqrt{3}}{2}}^3 \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} dx \end{aligned}$$

と立式できる。ここで、 $x = 3\sin\theta$ と置換すると、 $\frac{dx}{d\theta} = 3\cos\theta$ であり、積分範囲は下表のようになる。

x	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\rightarrow$	3
θ	$\frac{\pi}{3}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

よって、 $\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} = |\cos\theta| = \cos\theta$ より、定積分 $\int_{\frac{3\sqrt{3}}{2}}^3 \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} dx$ の値は、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{3\sqrt{3}}{2}}^3 \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} dx &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot 3\cos\theta d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{3}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

となるため、 S の値は

$$\begin{aligned} S &= \frac{\sqrt{3}}{8} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4}$

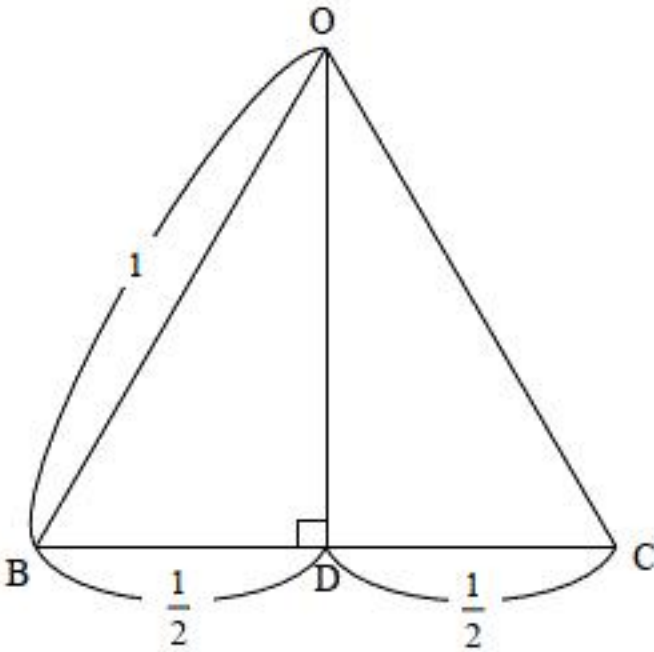
【Ⅱ】

【解答】

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$t\left(1-\frac{k}{n+1}\right)$	$\frac{1}{2}$	$-2t^2+t$	$t^2-t+\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}t^2+\frac{1}{6}t+\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

【解説】

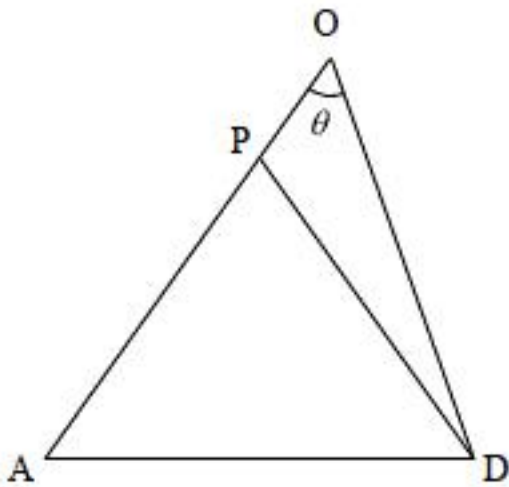
△OBC は下図の通りである。



△OBD において三平方の定理より、

$$\begin{aligned} \text{OD} &= \sqrt{\text{OB}^2 - \text{BD}^2} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となる。また、△OAD は下図の通りである。



$\text{OD} = \text{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であるため、△OAD において余弦定理より、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\text{OA}^2 + \text{OD}^2 - \text{AD}^2}{2 \cdot \text{OA} \cdot \text{OD}} \\ &= \frac{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

となる。ここで、点 M_k は線分 PD を $k:(n+1-k)$ に内分する点であるため、

$$\begin{aligned} \overline{\text{OM}}_k &= \overline{\text{OP}} + \text{PM}_k \overline{\text{PD}} \\ &= \overline{\text{OP}} + \frac{k}{n+1} \overline{\text{PD}} \\ &= \overline{\text{OP}} + \frac{k}{n+1} (\overline{\text{OD}} - \overline{\text{OP}}) \\ &= \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \overline{\text{OP}} + \frac{k}{n+1} \overline{\text{OD}} \\ &= t \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \overline{\text{OA}} + \frac{k}{n+1} \overline{\text{OD}} \end{aligned}$$

となる。また、内積 $\overline{\text{OA}} \cdot \overline{\text{OD}}$ の値は

$$\begin{aligned} \overline{\text{OA}} \cdot \overline{\text{OD}} &= |\overline{\text{OA}}| |\overline{\text{OD}}| \cos \theta \\ &= 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned} |\overline{\text{OM}}_k|^2 &= \left| t \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \overline{\text{OA}} + \frac{k}{n+1} \overline{\text{OD}} \right|^2 \\ &= t^2 \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)^2 |\overline{\text{OA}}|^2 + \left(\frac{k}{n+1}\right)^2 |\overline{\text{OD}}|^2 + 2t \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \frac{k}{n+1} \overline{\text{OA}} \cdot \overline{\text{OD}} \\ &= t^2 \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)^2 \cdot 1^2 + \left(\frac{k}{n+1}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2t \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \frac{k}{n+1} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \left\{ t^2 - \frac{k}{n+1} \cdot 2t^2 + \frac{k^2}{(n+1)^2} t^2 \right\} + \frac{k^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{3}{4} + \left\{ \frac{k}{n+1} t - \frac{k^2}{(n+1)^2} t \right\} \\ &= t^2 + \frac{k}{n+1} (-2t^2 + t) + \frac{k^2}{(n+1)^2} \left(t^2 - t + \frac{3}{4} \right) \end{aligned}$$

となり、和 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\overline{\text{OM}}_k|^2$ は

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\overline{\text{OM}}_k|^2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ t^2 + \frac{k}{n+1} (-2t^2 + t) + \frac{k^2}{(n+1)^2} \left(t^2 - t + \frac{3}{4} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{n} \cdot t^2 \sum_{k=1}^n 1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot (-2t^2 + t) \sum_{k=1}^n k + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \left(t^2 - t + \frac{3}{4} \right) \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{1}{n} \cdot t^2 \cdot n + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot (-2t^2 + t) \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &\quad + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \left(t^2 - t + \frac{3}{4} \right) \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &= t^2 + \left(-t^2 + \frac{1}{2} t \right) + \left(\frac{1}{3} t^2 - \frac{1}{3} t + \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{n+1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2} t + \left(\frac{1}{3} t^2 - \frac{1}{3} t + \frac{1}{4} \right) \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{2(n+1)} \right\} \\ &= \frac{1}{3} t^2 + \frac{1}{6} t + \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{1}{3} t^2 - \frac{1}{3} t + \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

と表される。よって、極限 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\overline{\text{OM}}_k|^2$ は

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\overline{\text{OM}}_k|^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{3} t^2 + \frac{1}{6} t + \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{1}{3} t^2 - \frac{1}{3} t + \frac{1}{4} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} t^2 + \frac{1}{6} t + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。ここで、 $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}$ とすると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{3} \left(x + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{11}{48} \end{aligned}$$

より、関数 $y = f(x)$ のグラフは軸が直線 $x = -\frac{1}{4}$ の下に凸な放物線であるため、関数 $f(x)$ は

$x \geq -\frac{1}{4}$ のとき単調増加する。また、

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{3} \cdot 0^2 + \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ f(1) &= \frac{1}{3} \cdot 1^2 + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

より、 $0 < t \leq 1$ において $\frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{6}t + \frac{1}{4}$ がとりうる値の範囲は

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{6}t + \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4}$$

である。

【Ⅲ】

(1)

関数 $f(x) = \sqrt{bx^2 + 1} - ax$ の導関数 $f'(x)$ 、第2次導関数 $f''(x)$ は

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2bx}{\sqrt{bx^2 + 1}} - a \\ &= \frac{bx}{\sqrt{bx^2 + 1}} - a \\ f''(x) &= \frac{b \cdot \sqrt{bx^2 + 1} - bx \cdot \frac{bx}{\sqrt{bx^2 + 1}}}{bx^2 + 1} - 0 \\ &= \frac{(b^2 x^2 + b) - b^2 x^2}{(bx^2 + 1)\sqrt{bx^2 + 1}} \\ &= \frac{b}{(bx^2 + 1)\sqrt{bx^2 + 1}} \end{aligned}$$

である。

(答) ①: $\frac{bx}{\sqrt{bx^2 + 1}}$, ②: b

(2)

$x > 0$ のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{bx^2 + 1} - ax \\ &= \frac{(\sqrt{bx^2 + 1} - ax)(\sqrt{bx^2 + 1} + ax)}{\sqrt{bx^2 + 1} + ax} \\ &= \frac{bx^2 + 1 - a^2 x^2}{\sqrt{bx^2 + 1} + ax} \\ &= \frac{-(a^2 - b)x + \frac{1}{x}}{\sqrt{b + \frac{1}{x^2}} + a} \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$

であり、 $0 < b < a^2$, $0 < a$ より、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

となる。

(証明終)

(3)

$b > 0$ であるため、(1)の結果より、 $f''(x) > 0$ である。よって、 $-\infty < x < \infty$ において $f'(x)$ は単調増加である。また、 $0 < b < a^2$, $0 < a$ より、 $\sqrt{b} - a < 0$ であり、 $x > 0$ のとき、

$$f'(x) = \frac{bx}{\sqrt{bx^2 + 1}} - a = \frac{b}{\sqrt{b + \frac{1}{x^2}}} - a$$

であるため、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{\sqrt{b + \frac{1}{x^2}}} - a \right) \\ &= \frac{b}{\sqrt{b + 0}} - a \\ &= \sqrt{b} - a \\ &< 0 \end{aligned}$$

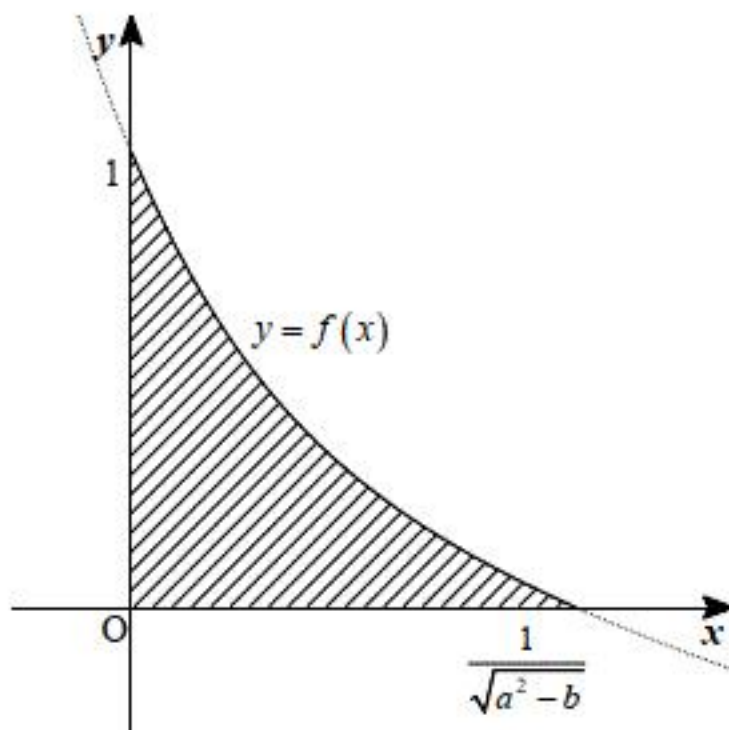
であるため、 $-\infty < x < \infty$ において $f'(x) < 0$ が成り立つ。

(証明終)

(4)

$f(0) = 1$ であり、(3)より $f(x)$ は単調減少する。また、 $f\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - b}}\right) = 0$ より、曲線 $y = f(x)$ と

x 軸の交点は $\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - b}}, 0\right)$ のみである。よって、曲線 $y = f(x)$ は x 軸と y 軸で囲まれた図形は下図の斜線部分である。



上図より、回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a^2 - b}}} \{f(x)\}^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a^2 - b}}} (\sqrt{bx^2 + 1} - ax)^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a^2 - b}}} \{(a^2 + b)x^2 - 2ax\sqrt{bx^2 + 1} + 1\} dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a^2 - b}}} \left\{ (a^2 + b)x^2 - \frac{a}{b} \cdot (bx^2 + 1)' \cdot \sqrt{bx^2 + 1} + 1 \right\} dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} (a^2 + b)x^3 - \frac{2a}{3b} (bx^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + x \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{a^2 - b}}} \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} (a^2 + b) \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - b}} \right)^3 - \frac{2a}{3b} \left\{ b \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - b}} \right)^2 + 1 \right\}^{\frac{3}{2}} + \frac{2a}{3b} + \frac{1}{\sqrt{a^2 - b}} \right] \\ &= \pi \left\{ \frac{1}{3} (a^2 + b) - \frac{2a^4}{3b} + (a^2 - b) \right\} \frac{1}{(a^2 - b)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2a\pi}{3b} \\ &= \frac{2\pi}{3} \left(2a^2 - b - \frac{a^4}{b} \right) \frac{1}{(a^2 - b)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2a\pi}{3b} \\ &= -\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{(a^2 - b)^2}{b} \cdot \frac{1}{(a^2 - b)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2a\pi}{3b} \\ &= \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{b} \\ &= \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{(a - \sqrt{a^2 - b})(a + \sqrt{a^2 - b})}{b(a + \sqrt{a^2 - b})} \\ &= \frac{2\pi}{3(a + \sqrt{a^2 - b})} \end{aligned}$$

となる。よって、実数 a, b が $a^2 - 1 = b$ の関係を満たすとき、

$$\begin{aligned} V &= \frac{2\pi}{3(a + \sqrt{a^2 - (a^2 - 1)})} \\ &= \frac{2\pi}{3(a + 1)} \end{aligned}$$

となる。

(答) $V = \frac{2\pi}{3(a + 1)}$

【Ⅳ】

【解答】

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
−4	$2^n-\frac{1}{n}$	445	5	8	e^a-e^{-a}	$\log 2$

【解説】

- (1)
3次方程式 $x^3+ax^2+bx+2a=0$ が2重解1をもつとき、もう一つの解を α とすると、解と係数の関係より

$$\begin{cases} -a=1+1+\alpha \\ -2a=1\cdot 1\cdot \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a=\alpha+2 \\ -2a=\alpha \end{cases}$$

となる。よって、 α の値は

$$2(\alpha+2)=\alpha$$

$$\therefore \alpha=-4$$

である。

- (2)
与えられた漸化式は
- $$a_{n+1}=2a_n+\frac{n+2}{n(n+1)}$$
- $$\Leftrightarrow a_{n+1}=2a_n+\frac{2(n+1)-n}{n(n+1)}$$
- $$\Leftrightarrow a_{n+1}=2a_n+\frac{2}{n}-\frac{1}{n+1}$$
- $$\Leftrightarrow a_{n+1}+\frac{1}{n+1}=2\left(a_n+\frac{1}{n}\right)$$
- と変形できる。よって、数列 $\left\{a_n+\frac{1}{n}\right\}$ は初項 $a_1+\frac{1}{1}=2$ 、公比2の等比数列であるため、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n+\frac{1}{n}=2^{n-1}\cdot 2=2^n$$

$$\therefore a_n=2^n-\frac{1}{n}$$

である。

- (3)
 $-5\cdot 4+7\cdot 3=1$ より、与えられた式は
- $$5x+7y=1$$
- $$\Leftrightarrow 5(x+4)+7(y-3)=0$$
- $$\Leftrightarrow 5(x+4)=-7(y-3)$$
- と変形できる。ここで、 x, y は整数であり、5と7は互いに素であるため、整数 k を用いて
- $$\begin{cases} x+4=7k \\ y-3=-5k \end{cases}$$
- $$\therefore (x, y)=(7k-4, -5k+3)$$
- と表せる。これらを $x+y\leq 100$ に代入すると
- $$x+y\leq 100$$
- $$\Leftrightarrow (7k-4)+(-5k+3)\leq 100$$
- $$\Leftrightarrow 2k-1\leq 100$$
- $$\Leftrightarrow k\leq \frac{101}{2}=50+\frac{1}{2}$$
- $$\therefore k\leq 50$$
- となるため、
- $$\begin{aligned} 2x+y &=2\cdot (7k-4)+(-5k+3) \\ &=9k-5 \\ &\leq 450-5 \\ &=445 \end{aligned}$$
- である。よって、 $2x+y$ の最大値は445である。

- (4)
線分 AB を $7:n$ に外分する点を P とすると、その位置ベクトルは
- $$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \frac{7}{7-n} \overrightarrow{AB} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{7}{7-n} \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ 4 \\ -\frac{7}{7} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{6}{7-n} \\ \frac{2(n-5)}{n-7} \end{pmatrix} \end{aligned}$$
- である。よって、
- $$\begin{aligned} \overrightarrow{OP}\cdot \overrightarrow{OA} &= \frac{6}{7-n} \cdot 0 + \frac{2(n-5)}{n-7} \cdot 2 \\ &= \frac{4(n-5)}{n-7} \end{aligned}$$
- となるため、 $\overrightarrow{OP}\perp \overrightarrow{OA}$ となるのは、
- $$\begin{aligned} \overrightarrow{OP}\cdot \overrightarrow{OA} &= 0 \\ \therefore n &= 5 \end{aligned}$$
- のときである。

- (5)
虚数 α は
- $$\alpha=\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$$
- と表せるため、ド・モアブルの定理より、
- $$\alpha^n=\cos\frac{n}{6}\pi+i\sin\frac{n}{6}\pi$$
- $$\alpha^{-n}=\cos\left(-\frac{n}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{n}{6}\pi\right)=\cos\frac{n}{6}\pi-i\sin\frac{n}{6}\pi$$
- となる。よって、
- $$\begin{aligned} \alpha^n+\frac{1}{\alpha^n} &= -2 \\ \Leftrightarrow \left(\cos\frac{n}{6}\pi+i\sin\frac{n}{6}\pi\right) + \left(\cos\frac{n}{6}\pi-i\sin\frac{n}{6}\pi\right) &= -2 \\ \Leftrightarrow \cos\frac{n}{6}\pi &= -1 \end{aligned}$$
- となるため、これを満たす整数 n は整数 k を用いて、
- $$\begin{aligned} \frac{n}{6}\pi &= (2k-1)\pi \\ \therefore n &= 12k-6 \end{aligned}$$
- と表される。また、 $1\leq n\leq 100$ より、
- $$\begin{aligned} 1 &\leq 12k-6\leq 100 \\ \Leftrightarrow \frac{7}{12} &\leq k\leq \frac{53}{6}=8+\frac{5}{6} \\ \therefore 1 &\leq k\leq 8 \end{aligned}$$
- であるため、求める自然数は、
- $$n=6, 18, 30, 42, 54, 66, 78, 90$$
- の8個である。

- (6)
 $x(t)=2t, y(t)=e^t+e^{-t}$ より
- $$\frac{dx}{dt}(t)=2, \frac{dy}{dt}(t)=e^t-e^{-t}$$
- であるため、
- $$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}(t)\right)^2} &= \sqrt{2^2+(e^t-e^{-t})^2} \\ &= \sqrt{e^{2t}+2+e^{-2t}} \\ &= \sqrt{(e^t+e^{-t})^2} \\ &= e^t+e^{-t} \left(\because e^t+e^{-t}>0\right) \end{aligned}$$
- となる。よって、曲線 C の長さ $l(a)$ は、
- $$\begin{aligned} l(a) &= \int_0^a \sqrt{\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2+\left(\frac{d}{dt}y(t)\right)^2} dt \\ &= \int_0^a (e^t+e^{-t}) dt \\ &= \left[e^t-e^{-t}\right]_0^a \\ &= e^a-e^{-a} \end{aligned}$$
- となるため、 $l(a)=\frac{3}{2}$ となるのは
- $$\begin{aligned} e^a-e^{-a} &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow 2e^{2a}-3e^a-2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2e^a+1)(e^a-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow e^a &= 2 \left(\because e^a>0\right) \\ \therefore a &= \log 2 \end{aligned}$$
- のときである。