

【I】

〔解答〕

(1)	①	②	
	-4	3	
(2)	③	④	
	$\frac{1}{2}$	1	
(3)	⑤	⑥	⑦
	$-\frac{7}{18}\pi$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{5}{18}\pi$

〔解説〕

(1)

加法定理より

$$\begin{aligned}
 \sin 3\theta &= \sin(\theta + 2\theta) \\
 &= \sin \theta \cos 2\theta + \cos \theta \sin 2\theta \\
 &= \sin \theta (1 - 2\sin^2 \theta) + 2\sin \theta \cos^2 \theta \\
 &= \sin \theta (1 - 2\sin^2 \theta) + 2\sin \theta (1 - \sin^2 \theta) \\
 &= -4\sin^3 \theta + 3\sin \theta
 \end{aligned}$$

と計算できるから

$$a = -4, b = 3$$

である。

(2)

(1)より $a = -4, b = 3$ であるから,

$$f(x) = -4x^3 + 3x$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -12x^2 + 3 \\
 &= -12\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)
 \end{aligned}$$

となるから, $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$-\frac{1}{2}$	...	$\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

増減表より, 3次関数 $f(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ のとき極大値

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

をとる。

(3)

$a = -4, b = 3$ のとき, 3次方程式 $ax^3 + bx - \frac{1}{2} = 0$ の解の1つが

$$x = \sin \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

で表されるとすると, (1)より,

$$\begin{aligned}
 a\sin^3 \theta + b\sin \theta - \frac{1}{2} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \sin 3\theta &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

となる。ここで $-\frac{3}{2}\pi \leq 3\theta \leq \frac{3}{2}\pi$ より

$$\begin{aligned}
 \sin 3\theta &= \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow 3\theta &= -\frac{7}{6}\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \\
 \therefore \theta &= -\frac{7}{18}\pi, \frac{\pi}{18}, \frac{5}{18}\pi
 \end{aligned}$$

となる。よってこれらを小さい順に $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ とすると

$$\theta_1 = -\frac{7}{18}\pi, \theta_2 = \frac{\pi}{18}, \theta_3 = \frac{5}{18}\pi$$

であることが分かる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
2	$\frac{17}{4}$	$f(x)-3$	$\log_a \frac{3+\sqrt{5}}{2}$	-1	$\log_a 4$	$\frac{9}{16}$

〔解説〕

$0 \leq x \leq y$ を満たす実数 x, y について $f(x) \leq f(y)$ が成り立つということは、 $x \geq 0$ において $f(x)$ が x の単調増加であるということである。したがって、 $0 \leq x \leq \log_a 4$ のときの $f(x)$ の最小値は

$$\begin{aligned} f(0) &= a^0 + a^{-0} \\ &= 2 \end{aligned}$$

であり、最大値は

$$\begin{aligned} f(\log_a 4) &= a^{\log_a 4} + a^{-\log_a 4} \\ &= 4 + \frac{1}{4} \\ &= \frac{17}{4} \end{aligned}$$

である。ここで

$$\begin{aligned} \{f(x)\}^2 &= (a^x + a^{-x})^2 \\ &= a^{2x} + a^{-2x} + 2 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} g(x) &= a^{2x} - 6a^x + 10 - 6a^{-x} + a^{-2x} \\ &= (a^{2x} + a^{-2x} + 2) - 6(a^x + a^{-x}) + 8 \\ &= \{f(x)\}^2 - 6f(x) + 8 \\ &= \{f(x) - 3\}^2 - 1 \end{aligned}$$

と表される。 $0 \leq x \leq \log_a 4$ において、 $f(x)$ が取り得る値の範囲は、

$$2 \leq f(x) \leq \frac{17}{4}$$

であるから、 $g(x)$ を $f(x)$ についての 2 次関数と考えると、

$$\text{最大値は、} f(x) = \frac{17}{4} \text{ のとき、} \left(\frac{17}{4} - 3 \right)^2 - 1 = \frac{9}{16}$$

$$\text{最小値は、} f(x) = 3 \text{ のとき、} -1$$

となる。それぞれの x の値は、 $0 \leq x \leq \log_a 4$ と $a > 1$ から、

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 \\ \Leftrightarrow a^x + a^{-x} &= 3 \\ \Leftrightarrow a^{2x} - 3a^x + 1 &= 0 \quad (\because a^x > 0) \\ \Leftrightarrow a^x &= \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad (\because 1 \leq a^x \leq 4) \\ \therefore x &= \log_a \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{17}{4} \\ \Leftrightarrow a^x + a^{-x} &= \frac{17}{4} \\ \Leftrightarrow 4a^{2x} - 17a^x + 4 &= 0 \quad (\because a^x > 0) \\ \Leftrightarrow (a^x - 4)(4a^x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow a^x &= 4 \quad (\because 1 \leq a^x \leq 4) \\ \therefore x &= \log_a 4 \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅲ〕

(1)

$$\begin{aligned} a_{n+2} - pa_{n+1} &= q(a_{n+1} - pa_n) \\ \Leftrightarrow a_{n+2} - (p+q)a_{n+1} + pqa_n &= 0 \end{aligned}$$

であるから、与えられた漸化式①と係数を比較すると、

$$p+q=3c-2$$

$$pq=3c-3$$

となる。よって、 p, q は x についての2次方程式

$$x^2 - (3c-2)x + 3c-3 = 0$$

の解である。したがって、これを解くと、

$$(x-3c-3)(x-1)=0$$

$$\therefore x=1, 3c-3$$

となる。よって、 $p=1, q=3c-3$ (p は定数, q は c の式)である。

(答) $p=1, q=3c-3$

(2)

$n \geq 1$ のとき、(1)と同様にして

$$\begin{cases} a_{n+2} - a_{n+1} = (3c-3)(a_{n+1} - a_n) & \dots\dots ② \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{n+2} - (3c-3)a_{n+1} = a_{n+1} - (3c-3)a_n & \dots\dots ③ \end{cases}$$

と変形できる。ここで、②より再帰的に

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (3c-3)^{n-1} (a_2 - a_1) \\ &= (3c-3)^{n-1} (7-3) \\ &= 4(3c-3)^{n-1} \end{aligned}$$

となり、同様にして③より

$$\begin{aligned} a_{n+1} - (3c-3)a_n &= a_2 - (3c-3)a_1 \\ &= 7 - (3c-3) \cdot 3 \\ &= 16-9c \end{aligned}$$

となるから、2式から a_{n+1} を消去することで、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} \{(3c-3)-1\}a_n &= 4(3c-3)^{n-1} - (16-9c) \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{4\{(3c-3)^{n-1}-1\}}{3c-4} + 3 \left(\because c \neq \frac{4}{3} \right) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) \ a_n = \frac{4\{(3c-3)^{n-1}-1\}}{3c-4} + 3$$