

〔Ⅰ〕

(1)

関数 $f(x) = x^2 - 2ax - |x - a| - 2a^2 + 2a$ に $x = 0$ を代入すると

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 - 0 - |0 - a| - 2a^2 + 2a \\ &= -2a^2 + 2a - |a| \end{aligned}$$

となるから、以下 a の値で場合分けをして考える。

[1] $a \geq 0$ のとき

与えられた条件を変形すると

$$\begin{aligned} f(0) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -2a^2 + a &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a(2a - 1) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq a \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。これは $a \geq 0$ を満たす。

[2] $a < 0$ のとき

与えられた条件を変形すると

$$\begin{aligned} f(0) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -2a^2 + 3a &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a(2a - 3) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq a \leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。これは $a < 0$ を満たさないため、不適である。

以上[1], [2]より、 $f(0) \geq 0$ が成り立つ a の値の範囲は

$$0 \leq a \leq \frac{1}{2}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad 0 \leq a \leq \frac{1}{2}$$

(2)

(1)の結果より

$$0 \leq f(0) \Leftrightarrow 0 \leq a \leq \frac{1}{2}$$

であるから、この条件の下で $f(0) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$ が成り立つ a の値の範囲を求める。このとき

$$\begin{aligned} f(0) &= -2a^2 + a \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - a - \left|\frac{1}{2} - a\right| - 2a^2 + 2a \\ &= -2a^2 + a + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - a\right) \quad (\because a \leq \frac{1}{2}) \\ &= -2a^2 + 2a - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

であるから、求める a の範囲は

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &\geq f(0) \Leftrightarrow -2a^2 + 2a - \frac{1}{4} \geq -2a^2 + a \\ \Leftrightarrow a &\geq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ と合わせて、 $0 \leq f(0) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$ が成り立つ a の値の範囲は

$$\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{1}{2}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{4} \leq a \leq \frac{1}{2}$$

〔Ⅱ〕

(1)

直線 l の方程式は $y = m(x - a) + b$ であるから、 α_1, β_1 は 2 次方程式

$$-x^2 + 4x + 3 = m(x - a) + b \Leftrightarrow x^2 + (m - 4)x - ma + b - 3 = 0$$

の実数解である。ここで、解と係数の関係より

$$\alpha_1 + \beta_1 = -(m - 4) \Leftrightarrow m = 4 - (\alpha_1 + \beta_1)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad m = 4 - (\alpha_1 + \beta_1)$$

(2)

面積 S_1, S_2 は

$$S_1 = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} -(x - \alpha_1)(x - \beta_1) dx = \frac{(\beta_1 - \alpha_1)^3}{6}$$

$$S_2 = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} -(x - \alpha_2)(x - \beta_2) dx = \frac{(\beta_2 - \alpha_2)^3}{6}$$

と表せるから、与えられた条件を変形すると

$$\begin{aligned} S_1 &= S_2 \\ \Leftrightarrow \frac{(\beta_1 - \alpha_1)^3}{6} &= \frac{(\beta_2 - \alpha_2)^3}{6} \\ \Leftrightarrow \beta_1 - \alpha_1 &= \beta_2 - \alpha_2 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで、(1)と同様に考えて

$$\alpha_1, \beta_1 : 2 \text{ 次方程式 } x^2 + (m - 4)x - ma + b - 3 = 0 \text{ の解}$$

$$\alpha_2, \beta_2 : 2 \text{ 次方程式 } x^2 - (m + 4)x + ma - b + 13 = 0 \text{ の解}$$

であることから、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = -(m - 4) \\ \alpha_1 \beta_1 = -ma + b - 3 \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 = m + 4 \\ \alpha_2 \beta_2 = ma - b + 13 \end{cases} \quad \dots \textcircled{3}$$

が得られる。よって、①の両辺を 2 乗して、②、③を用いることにより

$$\begin{aligned} (\beta_1 - \alpha_1)^2 &= (\beta_2 - \alpha_2)^2 \\ \Leftrightarrow (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 4\alpha_1\beta_1 &= (\alpha_2 + \beta_2)^2 - 4\alpha_2\beta_2 \\ \Leftrightarrow \{-(m - 4)\}^2 - 4(-ma + b - 3) &= (m + 4)^2 - 4(ma - b + 13) \\ \Leftrightarrow ma - b - 2m + 8 &= 0 \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad ma - b - 2m + 8 = 0$$

(3)

直線 l と放物線 C_1 が異なる 2 点で交わるための条件は、2 式を連立してできた 2 次方程式

$$x^2 + (m - 4)x - ma + b - 3 = 0$$

の判別式を D_1 とすると

$$D_1 > 0 \Leftrightarrow (m - 4)^2 - 4(-ma + b - 3) > 0 \quad \dots \textcircled{5}$$

である。また、直線 l と放物線 C_2 が異なる 2 点で交わるための条件は、2 式を連立してできた 2 次方程式

$$x^2 - (m + 4)x + ma - b + 13 = 0$$

の判別式を D_2 とすると

$$D_2 > 0 \Leftrightarrow \{-(m + 4)\}^2 - 4(ma - b + 13) > 0 \quad \dots \textcircled{6}$$

である。このとき、(2)の結果より $S_1 = S_2$ が成立するのは④が成り立つときであるから

$$\begin{aligned} \textcircled{5} &\Leftrightarrow (m - 4)^2 - 4(-2m + 5) > 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 > 4 \\ &\Leftrightarrow m < -2, 2 < m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{6} &\Leftrightarrow (m + 4)^2 - 4(2m + 5) > 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 > 4 \\ &\Leftrightarrow m < -2, 2 < m \end{aligned}$$

となる。さらに、④を変形すると

$$b = (a - 2)m + 8$$

となるから、 $m < -2, 2 < m$ を満たす任意の実数 m に対して④を満たす実数 a, b が存在する。

したがって、求める m の範囲は

$$m < -2, 2 < m$$

である。

$$(\text{答}) \quad m < -2, 2 < m$$

(4)

点 $P(a, b)$ について、任意の実数 m ($m < -2, m > 2$) で $S_1 = S_2$ が成り立つとき

任意の実数 m ($m < -2, m > 2$) で④が成立

$$\Leftrightarrow \text{任意の実数 } m \text{ (} m < -2, m > 2 \text{) で } (a - 2)m - b + 8 = 0 \text{ が成立}$$

$$\Leftrightarrow a = 2, b = 8$$

となるから、点 P は定点 $(2, 8)$ となることがわかる。

(証明終)

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)	①	②	③		
	$(-q, p)$	$(-p, -q)$	$(q, -p)$		
(2)	④	⑤	⑥	⑦	
	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{5\sqrt{3}}{3}$	0	
(3)	⑧				
	$\frac{5\sqrt{10}}{18}$				

〔解説〕

(1)

正方形の1つの頂点を (p, q) としたとき、他の3つの頂点は、この点について原点を中心に $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ だけ回転した点であるから、それぞれ

$$(-q, p), (-p, -q), (q, -p)$$

である。

(2)

(1)の結果より、曲線 $y = f(x)$ は点 $(\pm p, \pm q), (\pm q, \mp p)$ (複号同順)を通ることから

$$\begin{cases} q = ap^3 + bp^2 + cp + d & \cdots (\text{ア}) \\ p = -aq^3 + bq^2 - cq + d & \cdots (\text{イ}) \\ -q = -ap^3 + bp^2 - cp + d & \cdots (\text{ウ}) \\ -p = aq^3 + bq^2 + cq + d & \cdots (\text{エ}) \end{cases}$$

が成り立つ。このとき

$$(\text{ア}) + (\text{ウ}) : 2p^2b + 2d = 0$$

$$(\text{イ}) + (\text{エ}) : 2q^2b + 2d = 0$$

となり、 $p = \frac{1}{2}$ のとき $p^2 \neq q^2$ であるから

$$b = d = 0$$

であることがわかる。よって、

$$(\text{ア}) \times q + (\text{イ}) \times p : p^2 + q^2 = (p^3q - pq^3)a \Leftrightarrow a = \frac{1}{pq(p^2 - q^2)} \left(\because p^2 + q^2 = 1 \right)$$

となり、ここで $p = \frac{1}{2}, p^2 = \frac{1}{4}, q^2 = \frac{3}{4}$ であることから、 $a > 0$ より $q < 0$ となり

$$q = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

であることがわかる。したがって、 a, c の値は

$$a = \frac{8\sqrt{3}}{3}, c = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

と求まる。

(3)

$p = \frac{1}{2}$ のとき、(2)の結果より関数 $f(x)$ は $f(x) = \frac{8\sqrt{3}}{3}x^3 - \frac{5\sqrt{3}}{3}x$ であり、その導関数は

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8\sqrt{3}x^2 - \frac{5\sqrt{3}}{3} \\ &= 8\sqrt{3} \left(x^2 - \frac{5}{24} \right) \\ &= 8\sqrt{3} \left(x + \frac{\sqrt{30}}{12} \right) \left(x - \frac{\sqrt{30}}{12} \right) \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$-\frac{\sqrt{30}}{12}$	...	$\frac{\sqrt{30}}{12}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

ここで、 $f\left(-\frac{\sqrt{30}}{12}\right)$ の値は

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{\sqrt{30}}{12}\right) &= \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{5}{24} \cdot \left(-\frac{\sqrt{30}}{12}\right) - \frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{30}}{12}\right) \\ &= -\frac{5\sqrt{10}}{36} + \frac{5\sqrt{10}}{12} \\ &= \frac{5\sqrt{10}}{18} \end{aligned}$$

となるから、関数 $f(x)$ は $x = -\frac{\sqrt{30}}{12}$ で極大となり、極大値は $\frac{5\sqrt{10}}{18}$ であることがわかる。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤
21	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{51}{490}$	$\frac{8}{343}$

〔解説〕

(1)

白石 5 個，黒石 2 個の並べ方は，区別のついた 7 個のものから 2 個を選ぶ場合の数と一致するから

$${}_7C_2 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21 \text{ (通り)}$$

と求まる。

(2)

白石 5 個，黒石 2 個のすべての並べ方は同様に確からしく起こる。1 回の試行ですべての白石が取り除かれるのは，両端が黒石となる場合であるため，これは 1 通りである。したがって，求める確率は

$$\frac{1}{21}$$

である。

(3)

1 回の試行で白石がちょうど 2 個残るのは，白石 3 個が黒石 2 個に挟まれる場合である。黒石 2 個と白石 3 個を 1 セットと考えると，このセットと残りの 2 個の白石の並べ方は

$${}_3C_1 = 3 \text{ (通り)}$$

である。セットの中の並べ方は，黒石が両端になるように並べれば良いため，1 通りである。したがって，1 回の試行で白石がちょうど 2 個残る並べ方は

$$3 \cdot 1 = 3 \text{ (通り)}$$

である。以上より，求める確率は

$$\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

である。

(4)

1 回目で k 個の白石が取り除かれる並べ方の数は，黒石 2 個と k 個の白石を 1 セットとし，このセットと残りの $5-k$ 個の白石を並べる場合の数に等しいため

$${}_{5-k+1}C_1 = 6-k \text{ (通り)}$$

である。したがって，1 回目に k 個の白石が取り除かれる確率は

$$\frac{6-k}{21}$$

となる。また，2 回目で残りの全ての白石が取り除かれるのは，2 回目の試行で両端が黒石となる場合であるから，1 回目の試行後の白石の個数にかかわらず，このような並べ方は 1 通りである。さらに，1 回目で k ($0 \leq k \leq 4$) 個の白石が取り除かれた場合，残りの石の総数は $7-k$ 個であるから，1 回目で k 個の白石が取り除かれて，ちょうど 2 回目の試行で終了する確率は

$$\begin{aligned} \frac{6-k}{21} \cdot \frac{1}{{}_{5-k+2}C_2} &= \frac{6-k}{21} \cdot \frac{2 \cdot 1}{(7-k)(6-k)} \\ &= \frac{2}{21(7-k)} \end{aligned}$$

と表せる。1 回目で 5 個の白石が取り除かれた場合は 1 回の試行で終了してしまうことに注意すると，ちょうど 2 回目の試行で終了する確率は

$$\sum_{k=0}^4 \frac{2}{21(7-k)} = \frac{2}{147} + \frac{1}{63} + \frac{2}{105} + \frac{1}{42} + \frac{2}{63} = \frac{51}{490}$$

と求まる。

(5)

1 回の試行で白石が取り除かれない確率は，(4)における考察より

$$\frac{6-0}{21} = \frac{2}{7}$$

であるから，3 回の試行の後，白石が 5 個のまま残っている確率は

$$\left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{8}{343}$$

である。