

【I】

(1)

点Pは直線AB上にあるから、実数 a を用いて

$$\overline{OP} = (1-a)\overline{OA} + a\overline{OB}$$

とおける。このとき、

$$\begin{aligned} 4+pi &= (1-a) \cdot 2i + a(2+3i) \\ \Leftrightarrow 4+pi &= 2a + (2+a)i \end{aligned}$$

となる。 p, a は実数だから

$$\begin{cases} 4=2a \\ p=2+a \end{cases} \\ \therefore a=2, p=4$$

となる。 $q+qi=q(1+i)$, $4+4i=4(1+i)$ より、直線QPは原点と点 $(1+i)$ を通る直線である。直線QAと直線QPは直交するから、直線QAは、原点と点 $(1-i)$ を通る直線と平行である。よって実数 c を用いて

$$2i-(q+qi)=c(1-i)$$

と表される。これを整理すると

$$-q+(2-q)i=c-ci$$

となり、 c, q は実数だから

$$\begin{cases} -q=c \\ 2-q=-c \end{cases}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} 2-q &= q \\ \therefore q &= 1 \end{aligned}$$

となる。

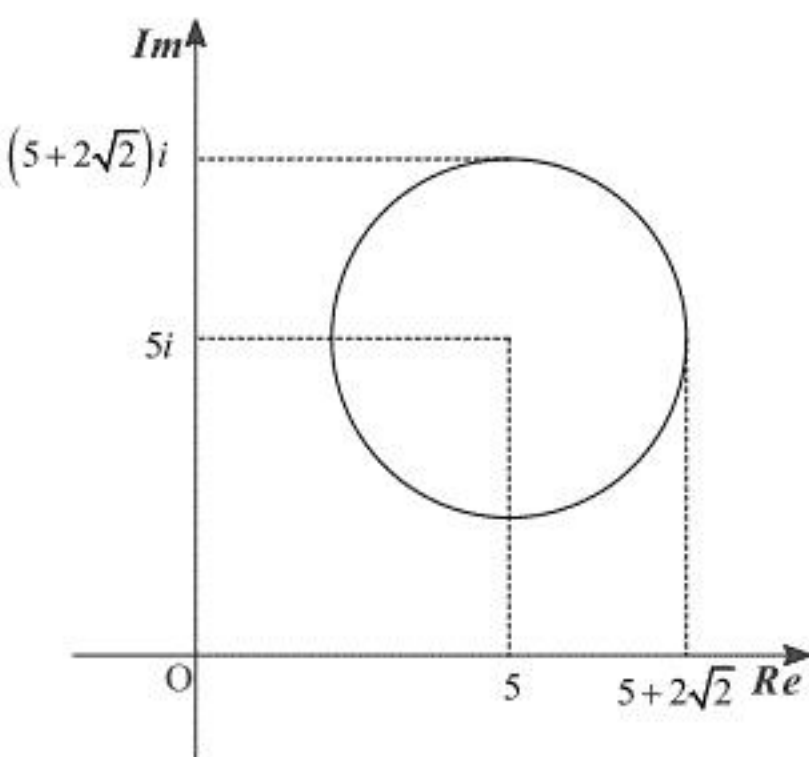
(答) $p=4, q=1$

(2)

条件式は両辺共に正なので2乗しても同値であり、

$$\begin{aligned} |z-(1+i)|^2 &= 4|z-(4+4i)|^2 \\ \Leftrightarrow \{z-(1+i)\}\{\overline{z-(1+i)}\} &= 4\{z-4(1+i)\}\{\overline{z-4(1+i)}\} \\ \Leftrightarrow \{z-(1+i)\}\{\overline{z}-(1-i)\} &= 4\{z-4(1+i)\}\{\overline{z}-4(1-i)\} \\ \Leftrightarrow z\overline{z}-5(1-i)z-5(1+i)\overline{z}+42 &= 0 \\ \Leftrightarrow \{z-5(1+i)\}\{\overline{z}-5(1-i)\} &= 8 \\ \Leftrightarrow \{z-5(1+i)\}\{\overline{z-5(1+i)}\} &= 8 \\ \Leftrightarrow |z-5(1+i)|^2 &= 8 \\ \Leftrightarrow |z-5(1+i)| &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

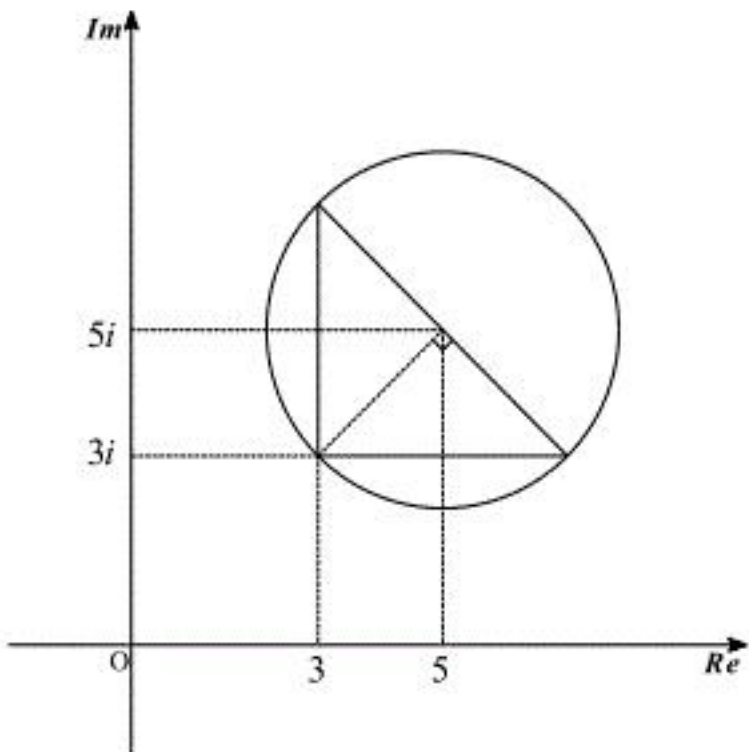
であるから、複素数 z の表す図形は点 $(5+5i)$ を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円であり、図示すると次のようになる。



(答) 点 $(5+5i)$ を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円、図は前図の通り

(3)

(2)で図示した円を円 C とおく。点 (z) と点 $(10+10i-z)$ の中点は、 $\frac{1}{2}\{z+(10+10i-z)\}=5+5i$ であり、これは円 C の中心と一致し、点 (z) と点 $(10+10i-z)$ を結ぶ線分は円 C の直径であり、長さは一定である。よってこれを底辺としたとき三角形の面積が最大になるのは高さが最大になる時であり、これは点 $(3+3i)$ から底辺におろした垂線の足が円 C の中心に一致するときである。図示すると次のようになる。



ここで、上図の実線からなる三角形は直角二等辺三角形であり、その斜辺は円 C の直径に一致し、長さは $2\sqrt{2} \cdot 2 = 4\sqrt{2}$ である。さらに、直角を挟む辺々はそれぞれ実軸、虚軸に平行であり、長さは $4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 4$ である。したがって、求める z の値は、

$$3+3i+4=7+3i \text{ または } 3+3i+4i=3+7i$$

となる。

(答) $7+3i, 3+7i$

〔Ⅱ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
$\frac{p}{p+q}$	$\frac{pr}{p+q}$	$\frac{r}{p+q+r}$	$\frac{p}{p+q+r}$	$\frac{q}{p+q+r}$	$\frac{r}{p+q+r}$	$\frac{p}{p+q+r}$
⑧						
$\frac{a\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}}$						

〔解説〕

角の二等分線の性質より

$$AD:DC=AB:BC=p:q$$

であるから

$$\overrightarrow{AD}=\frac{p}{p+q}\overrightarrow{AC}$$

となる。よって、

$$|\overrightarrow{AD}|=\frac{p}{p+q}|\overrightarrow{AC}|=\frac{pr}{p+q}$$

である。角の二等分線の性質により、

$$BI:ID=AB:AD=p:\frac{pr}{p+q}=(p+q):r$$

より、点Iは辺BDを $(p+q):r$ に内分する点である。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \frac{r}{p+q+r}\overrightarrow{AB} + \frac{p+q}{p+q+r}\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{r}{p+q+r}\overrightarrow{AB} + \frac{p+q}{p+q+r} \cdot \frac{p}{p+q}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{r}{p+q+r}\overrightarrow{AB} + \frac{p}{p+q+r}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{r}{p+q+r}\overrightarrow{AB} + \frac{p}{p+q+r}\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{r}{p+q+r}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \frac{p}{p+q+r}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{q}{p+q+r}\overrightarrow{OA} + \frac{r}{p+q+r}\overrightarrow{OB} + \frac{p}{p+q+r}\overrightarrow{OC} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

である。A, B, Cの座標が $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ で与えられたとき、式①より、点I

のx座標は $\frac{q}{p+q+r} \cdot a$ である。 $p=\sqrt{a^2+b^2}$, $q=\sqrt{b^2+c^2}$, $r=\sqrt{c^2+a^2}$ であるから点Iのx座

標は

$$\frac{a\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}}$$

である。

〔Ⅲ〕

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2n-1)x^{2n-2}e^{-x^{2n}} + x^{2n-1}(-2nx^{2n-1})e^{-x^{2n}} \\ &= (-2nx^{2n} + 2n-1)e^{-x^{2n}}x^{2n-2} \end{aligned}$$

(答) $(-2nx^{2n} + 2n-1)e^{-x^{2n}}x^{2n-2}$

(2)

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 0, \pm \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n}} \text{ である。このとき, } 0 < \frac{2n-1}{2n} < 1 \text{ より,} \\ 0 &< \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n}} < 1 \end{aligned}$$

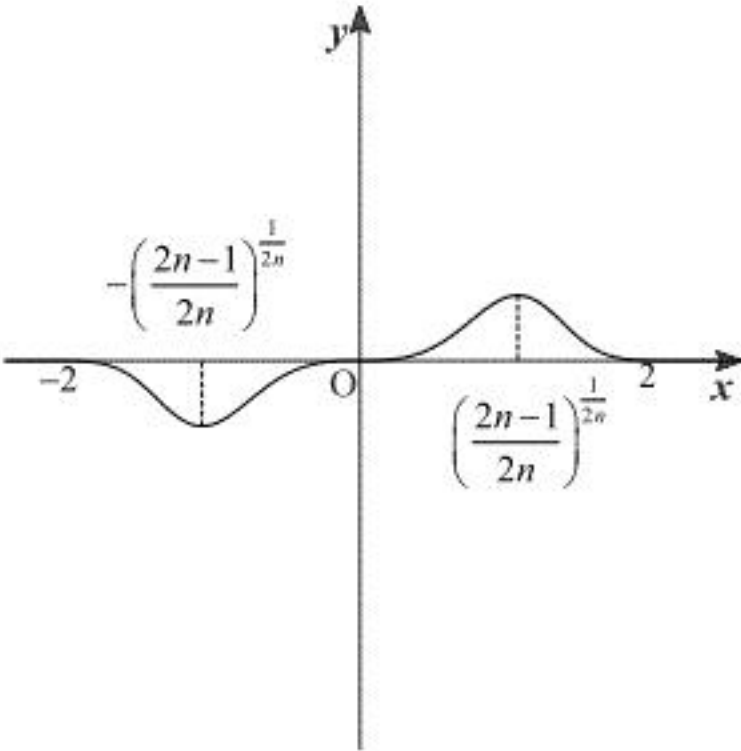
であり,

$$f(-2) = (-2)^{2n-1}e^{-(-2)^{2n}} = -2^{2n-1}e^{-2^{2n}}$$

であることに注意して, 増減表は次図のようになる。

x	-2	$\cdots$	$-\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n}}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-2^{2n-1}e^{-2^{2n}}$	$\searrow$	$f\left(-\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n}}\right)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f\left(\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n}}\right)$	$\searrow$	$2^{2n-1}e^{-2^{2n}}$

これを図示すると次図のようになる。



$f(-2) < 0, f(2) > 0$ であるから, $f(x)$ の最大値は

$$f\left(\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n}}\right) = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{\frac{2n-1}{2n}} e^{-\frac{2n-1}{2n}}$$

となり, 最小値は

$$f\left(-\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n}}\right) = -\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{\frac{2n-1}{2n}} e^{-\frac{2n-1}{2n}}$$

となる。

(答) 最大値 $\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{\frac{2n-1}{2n}} e^{-\frac{2n-1}{2n}}$, 最小値 $-\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{\frac{2n-1}{2n}} e^{-\frac{2n-1}{2n}}$

(3)

$v = x^{2n}$ とおくと, $dv = 2nx^{2n-1}dx = \frac{2nv}{x}dx$ より $\frac{1}{2n}dv = \frac{v}{x}dx$ である。また, x, v は以下のように対応する。

x	$0 \rightarrow a_n$
v	$0 \rightarrow a_n^{2n}$

よって,

$$\begin{aligned} \int_0^{a_n} f(x)dx &= \int_0^{a_n^{2n}} \frac{v}{x} e^{-v} dv \\ &= \int_0^{a_n^{2n}} \frac{e^{-v}}{2n} dv \\ &= \frac{1}{2n} [-e^{-v}]_0^{a_n^{2n}} \\ &= \frac{1}{2n} (1 - e^{-a_n^{2n}}) \end{aligned}$$

である。ここで, $g(x) = e^x$ とおくと, $g'(x) = e^x$ であり, $g'(0) = 1$ である。また, 微分係数の定義式より,

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

であるから,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^{a_n} f(x)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{-\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \left(\because h = -\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2}$

【Ⅳ】

【解答】

(1)	1	
	$-\frac{3}{4}\pi$	
(2)	2	3
	$a \leq \frac{9}{4}$	$2 < a < \frac{9}{4}$
(3)	4	
	957	
(4)	5	6
	4	$8e-16$
(5)	7	
	$n-1$	

【解説】

(1)

解と係数の関係より

$$\tan \alpha + \tan \beta = -5 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\tan \alpha \tan \beta = 6 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

であるから

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

である。式②より $\tan \alpha$ と $\tan \beta$ は同符号であり、これと式①より $\tan \alpha < 0$, $\tan \beta < 0$ である。

これと $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$, $|\beta| < \frac{\pi}{2}$ より $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$ だから $-\pi < \alpha + \beta < 0$ である。これと式③

より $\alpha + \beta = -\frac{3}{4}\pi$ である。

(2)

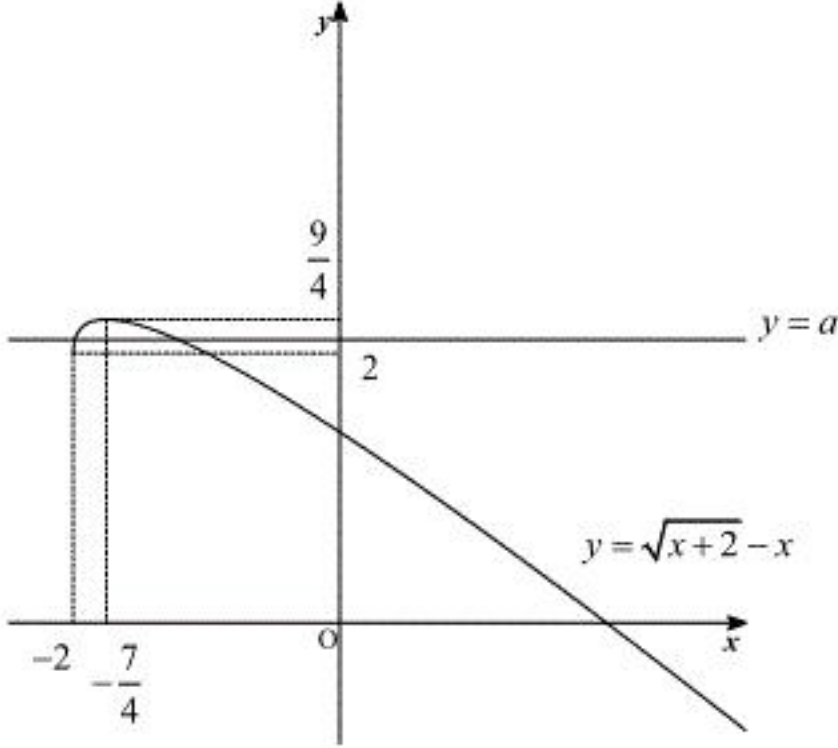
$$\sqrt{x+2} = x+a$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{x+2} - x$$

より、 $y = \sqrt{x+2}$ と $y = x+a$ が共有点を持つことは、 $y = \sqrt{x+2} - x$ と $y = a$ が共有点を持つことと同値である。 $f(x) = \sqrt{x+2} - x$ とおくと、 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - 1$ であるから、増減表は次図のようになる。

x	-2	...	$-\frac{7}{4}$	...	∞
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

グラフにすると次のようになる。



前の増減表及びグラフより、 $y = \sqrt{x+2} - x$ と $y = a$ が共有点を持つのは $a \leq \frac{9}{4}$ のときである

から、 $y = \sqrt{x+2}$ と $y = x+a$ が共有点を持つとき、定数 a の取りうる範囲は $a \leq \frac{9}{4}$ である。

共有点の数が2個でかつ、その共有点の y 座標がともに正であるとき、 x 座標の条件は

$$\sqrt{x+2} > 0 \Leftrightarrow x > -2$$

であるから、定数 a の取りうる範囲は $2 < a < \frac{9}{4}$ である。

(3)

題意を満たす自然数を z とおくと、0 以上の整数 x, y を用いて

$$z = 6x + 3 = 17y + 5$$

とおける。

$$6x + 3 = 17y + 5$$

$$\Leftrightarrow 6x - 17y = 2$$

であり、 $x = 6, y = 2$ のときこの式を満たす。 $6 \cdot 6 - 17 \cdot 2 = 2$ より、 $6x - 17y = 2$ と辺々引いて

$$6(x-6) - 17(y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6(x-6) = 17(y-2)$$

である。6 と 17 は互いに素なので、整数 k を用いて、

$$x-6 = 17k, y-2 = 6k$$

$$\therefore x = 17k + 6, y = 6k + 2$$

とおける。このとき $z = 102k + 39$ である。 z が3桁の自然数であるとき

$$z \leq 999 \Leftrightarrow 102k + 39 \leq 999$$

より、 $k \leq 9$ である。よって z の最大値は、 $k = 9$ のとき、

$$102 \cdot 9 + 39 = 957$$

である。

(4)

$$\begin{aligned} \int_1^{e^2} \frac{1}{\sqrt{x}} \log x dx &= \left[2\sqrt{x} \log x \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{2}{\sqrt{x}} dx \\ &= 4e - \left[4\sqrt{x} \right]_1^{e^2} \\ &= 4e - (4e - 4) \\ &= 4 \end{aligned}$$

である。これを用いて、

$$\begin{aligned} \int_1^{e^2} \frac{1}{\sqrt{x}} (\log x)^2 dx &= \left[2\sqrt{x} (\log x)^2 \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{4\sqrt{x} \log x}{x} dx \\ &= 8e - 4 \int_1^{e^2} \frac{1}{\sqrt{x}} \log x dx \\ &= 8e - 4 \cdot 4 \\ &= 8e - 16 \end{aligned}$$

となる。

(5)

公差を d とおくと、 $a_n = a_1 + d(n-1)$ であるから $d = \frac{b-a}{n-1}$ である。ここで、 $a \neq b$ であるから、

$n \geq 2$ であり、 $d \neq 0$ である。よって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{(\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k})(\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k})} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{a_{k+1} - a_k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{d} \\ &= \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{d} \\ &= \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\frac{b-a}{n-1}} = (n-1) \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{n-1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \end{aligned}$$

となる。