

〔I〕

〔解答〕

①	②	③	④
$\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$	n	$\frac{\sqrt{n^2+4}-n}{2}$	0
⑤	⑥	⑦	
$\frac{\sqrt{n^2+4}-n}{2}$	n	$\frac{\sqrt{n^2+4}-n}{2}$	

〔解説〕

2 次方程式 $x^2 - nx - 1 = 0$ の解は、解の公式より

$$x = \frac{n \pm \sqrt{n^2 + 4}}{2}$$

である。このうち正のものを α とすると、 $n < \sqrt{n^2 + 4}$ から $\alpha = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$ である。ここで、

$$0 < n^2 < n^2 + 4 < n^2 + 4n + 4 \quad (\because n > 0)$$

であるから、各辺の正の平方根をとると、

$$n < \sqrt{n^2 + 4} < n + 2$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \frac{n+n}{2} &< \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2} < \frac{n+n+2}{2} \\ \Leftrightarrow n &< \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2} < n+1 \end{aligned}$$

となるから、 α の整数部分は $[\alpha] = n$ であり、小数部分は

$$\begin{aligned} \langle \alpha \rangle &= \alpha - [\alpha] \\ &= \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} - n \\ &= \frac{\sqrt{n^2 + 4} - n}{2} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} &= \frac{2}{\sqrt{n^2 + 4} + n} \\ &= \frac{2(\sqrt{n^2 + 4} - n)}{n^2 + 4 - n^2} \\ &= \frac{\sqrt{n^2 + 4} - n}{2} \end{aligned}$$

である。 $n < \sqrt{n^2 + 4} < n + 2$ を利用すると、

$$\begin{aligned} \frac{n-n}{2} &< \frac{\sqrt{n^2+4}-n}{2} < \frac{n+2-n}{2} \\ \Leftrightarrow 0 &< \frac{\sqrt{n^2+4}-n}{2} < 1 \end{aligned}$$

となるから、 $\frac{1}{\alpha}$ の整数部分は $\left[\frac{1}{\alpha}\right] = 0$ となり、小数部分は

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\alpha} \right\rangle &= \frac{1}{\alpha} - \left[\frac{1}{\alpha} \right] \\ &= \frac{\sqrt{n^2 + 4} - n}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\langle \alpha \rangle = \frac{\sqrt{n^2 + 4} - n}{2} = \frac{1}{\alpha}$ となることに注意すると、

$$\frac{1}{\langle \alpha \rangle} = \alpha = \frac{\sqrt{n^2 + 4} + n}{2}$$

となるから、

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\langle \alpha \rangle} \right] &= [\alpha] = n \\ \left\langle \frac{1}{\langle \alpha \rangle} \right\rangle &= \langle \alpha \rangle = \frac{\sqrt{n^2 + 4} - n}{2} \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

①	②	③	④
t^2-2	t^3-3t	$t^3-\frac{11}{4}t^2-5t+\frac{13}{2}$	$t \geq 2$
⑤	⑥	⑦	
$\frac{5}{2}$	$-\frac{121}{16}$	$-1, 1$	

〔解説〕

$t=2^x+2^{-x}$ であるとき、

$$\begin{aligned} t^2 &= (2^x+2^{-x})^2 \\ &= 2^{2x}+2+2^{-2x} \\ t^3 &= (2^x+2^{-x})^3 \\ &= 2^{3x}+3\cdot 2^x+3\cdot 2^{-x}+2^{-3x} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} 2^{2x}+2^{-2x} &= t^2-2 \\ 2^{3x}+2^{-3x} &= t^3-3(2^x+2^{-x}) \\ &= t^3-3t \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^{3x}+2^{-3x}-\frac{11}{4}(2^{2x}+2^{-2x})-2(2^x+2^{-x})+1 \\ &= t^3-3t-\frac{11}{4}(t^2-2)-2t+1 \\ &= t^3-\frac{11}{4}t^2-5t+\frac{13}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 t のとり得る値について考えると、相加相乗平均の関係より、

$$t=2^x+2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}}=2$$

となる。ただし、等号が成り立つのは $2^x=2^{-x}$ のとき、つまり $x=0$ のときである。ここで、

$$g(t)=t^3-\frac{11}{4}t^2-5t+\frac{13}{2} \text{ とおくと、}$$

$$\begin{aligned} g'(t) &= 3t^2-\frac{11}{2}t-5 \\ &= \frac{1}{2}(3t+2)(2t-5) \end{aligned}$$

となる。よって、 $g'(t)=0$ となるとき、 $t=-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}$ であるから、 $g(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	2	...	$\frac{5}{2}$	...
$g'(t)$	-	-	0	+
$g(t)$	$g(2)$	$\searrow$	$g\left(\frac{5}{2}\right)$	$\nearrow$

増減表より、 $f(x)$ は $t=\frac{5}{2}$ で最小値をとり、このとき

$$\begin{aligned} g\left(\frac{5}{2}\right) &= \left(\frac{5}{2}\right)^3-\frac{11}{4}\left(\frac{5}{2}\right)^2-5\cdot\frac{5}{2}+\frac{13}{2} \\ &= -\frac{121}{16} \end{aligned}$$

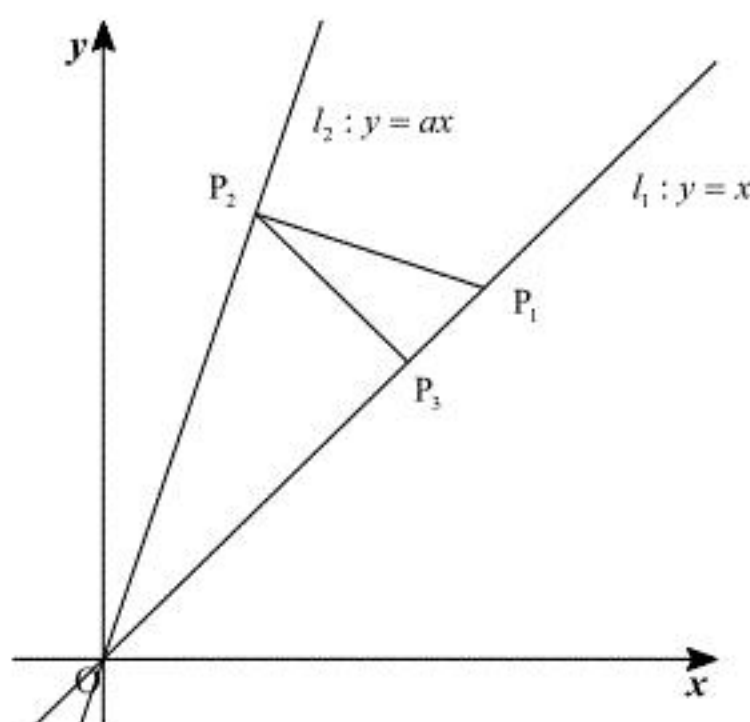
である。 $t=\frac{5}{2}$ のとき、 x の値は、

$$\begin{aligned} 2^x+2^{-x} &= \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow 2\cdot(2^x)^2-5\cdot 2^x+2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2\cdot 2^x-1)(2^x-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2^x &= \frac{1}{2}, 2 \\ \therefore x &= -1, 1 \end{aligned}$$

である。

〔Ⅲ〕

(1)



直線 l_2 の傾きは a であるから、それに垂直な直線の傾きは $-\frac{1}{a}$ である。点 $P_1(1, 1)$ を通り、傾き

$-\frac{1}{a}$ である直線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{a}(x-1)+1 \\ &= -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a} + 1 \end{aligned}$$

であり、この直線と直線 l_2 の交点が点 P_2 である。交点の x 座標は

$$\begin{aligned} ax &= -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a} + 1 \\ \Leftrightarrow \frac{a^2+1}{a}x &= \frac{a+1}{a} \\ \therefore x &= \frac{a+1}{a^2+1} \end{aligned}$$

であり、このとき y 座標は $y = \frac{a^2+a}{a^2+1}$ であるから、点 P_2 の座標は $\left(\frac{a+1}{a^2+1}, \frac{a^2+a}{a^2+1}\right)$ となる。

$$(\text{答}) \left(\frac{a+1}{a^2+1}, \frac{a^2+a}{a^2+1} \right)$$

(2)

直線 l_1 の傾きは 1 であるから、それに垂直な直線の傾きは -1 である。点 $P_2\left(\frac{a+1}{a^2+1}, \frac{a^2+a}{a^2+1}\right)$ を

通り、傾き -1 である直線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= -1\left(x - \frac{a+1}{a^2+1}\right) + \frac{a^2+a}{a^2+1} \\ &= -x + \frac{a^2+2a+1}{a^2+1} \end{aligned}$$

であり、この直線と直線 l_1 の交点が点 P_3 である。交点の x 座標は

$$\begin{aligned} x &= -x + \frac{a^2+2a+1}{a^2+1} \\ \Leftrightarrow 2x &= \frac{a^2+2a+1}{a^2+1} \\ \therefore x &= \frac{(a+1)^2}{2(a^2+1)} \end{aligned}$$

であり、このとき y 座標は $y = \frac{(a+1)^2}{2(a^2+1)}$ であるから、点 P_3 の座標は $\left(\frac{(a+1)^2}{2(a^2+1)}, \frac{(a+1)^2}{2(a^2+1)}\right)$ となる。

$$(\text{答}) \left(\frac{(a+1)^2}{2(a^2+1)}, \frac{(a+1)^2}{2(a^2+1)} \right)$$

(3)

点 P_1 の座標は $(1, 1)$ 、点 P_3 の座標は $\left(\frac{(a+1)^2}{2(a^2+1)}, \frac{(a+1)^2}{2(a^2+1)}\right)$ であるから、 $\frac{(a+1)^2}{2(a^2+1)} < 1$ を示せばよ

い。ここで、 $a > 1$ を利用すると、

$$\begin{aligned} 1 - \frac{(a+1)^2}{2(a^2+1)} &= \frac{a^2-2a+1}{2(a^2+1)} \\ &= \frac{(a-1)^2}{2(a^2+1)} \\ &> 0 \end{aligned}$$

となるから、題意は示された。

(証明終)