

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	①	②	③	④
	10	1	$\frac{10}{9}(10^n-1)-n$	3
(2)	⑤	⑥		
	$\frac{5}{9}(10^n-1)$	7		

〔解説〕

(1)

a_n は各位の数がすべて 9 であるから、 $a_n = 10^n - 1$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (10^k - 1) \\ &= 10 \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n \\ &= \frac{10}{9}(10^n - 1) - n\end{aligned}$$

である。また、二項定理より、

$$\begin{aligned}a_n &= (9 + 1)^n - 1 \\ &= \left(\sum_{k=0}^n {}_nC_k \cdot 9^k \right) - 1 \\ &= 9n + 27 \cdot 3 \sum_{k=2}^n {}_nC_k \cdot 9^{k-2}\end{aligned}$$

であるから、 n が 3 の倍数となるとき、 a_n は 27 の倍数となる。

(2)

b_n は各位の数がすべて 5 であるから、(1) を利用すると

$$b_n = (10^n - 1) \cdot \frac{5}{9}$$

となる。また、二項定理より、(1) を用いて

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{5}{9} \cdot a_n \\ &= 5n + 5 \cdot 9 \cdot \sum_{k=2}^n {}_nC_k \cdot 9^{k-2}\end{aligned}$$

であるから、 b_{5000} を 9 で割ったときの余りは、 $5 \cdot 5000$ を 9 で割ったときの余りに等しい。
 $\angle \setminus \quad \angle \setminus \quad \angle \quad \quad \quad \angle$

である。よって、 l と円 O の交点の x 座標は、2 つの方程式から y を消去すると

$$\begin{aligned}x^2 + \left(2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 5x^2 - 2\sqrt{2}x - \frac{1}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 5 \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(x + \frac{\sqrt{2}}{10} \right) &= 0 \\ \therefore x &= -\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

より、 $x = -\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ となる。ここで、直線 l 上にあり x 座標が $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ の点の y 座標は

$$y = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{10} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

となるから、点 B と異なる交点の座標は $\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}, -\frac{7\sqrt{2}}{10} \right)$ であることがわかる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

	①	②	③	④
(1)	10	1	$\frac{10}{9}(10^n - 1) - n$	3
	⑤	⑥		
(2)	$\frac{5}{9}(10^n - 1)$	7		

〔解説〕

(1)

a_n は各位の数がすべて 9 であるから、 $a_n = 10^n - 1$ となる。よって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (10^k - 1) \\ &= 10 \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n \\ &= \frac{10}{9}(10^n - 1) - n \end{aligned}$$

である。また、二項定理より、

$$\begin{aligned} a_n &= (9 + 1)^n - 1 \\ &= \left(\sum_{k=0}^n {}_nC_k \cdot 9^k \right) - 1 \\ &= 9n + 27 \cdot 3 \sum_{k=2}^n {}_nC_k \cdot 9^{k-2} \end{aligned}$$

であるから、 n が 3 の倍数となるとき、 a_n は 27 の倍数となる。

(2)

b_n は各位の数がすべて 5 であるから、(1) を利用すると

$$b_n = (10^n - 1) \cdot \frac{5}{9}$$

となる。また、二項定理より、(1) を用いて

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{5}{9} \cdot a_n \\ &= 5n + 5 \cdot 9 \cdot \sum_{k=2}^n {}_nC_k \cdot 9^{k-2} \end{aligned}$$

であるから、 b_{5000} を 9 で割ったときの余りは、 $5 \cdot 5000$ を 9 で割ったときの余りに等しい。

$$5 \cdot 5000 = 9 \cdot 2777 + 7$$

より、求める余りは 7 である。

〔Ⅲ〕

(1)

$$a^2 + b^2 = s, 2ab = t \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{6}{b-a} \int_a^b (1+ax)(1+bx) dx \\ &= \frac{6}{b-a} \int_a^b \{ abx^2 + (a+b)x + 1 \} dx \\ &= \frac{6}{b-a} \left[\frac{1}{3} abx^3 + \frac{1}{2} (a+b)x^2 + x \right]_a^b \\ &= \frac{6}{b-a} \left\{ \frac{ab}{3} (b^3 - a^3) + \frac{(a+b)}{2} (b^2 - a^2) + (b-a) \right\} \\ &= 2ab(a^2 + b^2 + ab) + 3(a^2 + b^2 + 2ab) + 6 \\ &= t \left(s + \frac{1}{2} t \right) + 3(s+t) + 6 \\ &= \frac{1}{2} t^2 + st + 3s + 3t + 6 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad I = \frac{1}{2} t^2 + st + 3s + 3t + 6$$

(2)

$$a = \cos \theta, b = \sin \theta \text{ のとき,}$$

$$\begin{aligned} s &= a^2 + b^2 \\ &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\ &= 1 \\ t &= 2ab \\ &= 2 \cos \theta \sin \theta \\ &= \sin 2\theta \end{aligned}$$

であり、これを(1)の式に代入すると、

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \sin^2 2\theta + 4 \sin 2\theta + 9 \\ &= \frac{1}{2} (\sin 2\theta + 4)^2 + 1 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ より $-1 < \sin 2\theta < 1$ であるから、求める範囲は $\frac{11}{2} < I < \frac{27}{2}$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{11}{2} < I < \frac{27}{2}$$