

〔 I 〕

(1)

問題文より

$$\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{OC} = p\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

であるから、求めるベクトルは

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PM} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} - p\vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PN} &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OP} \\ &= \frac{1}{2}\vec{b} + \left(\frac{1}{2} - p\right)\vec{c}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\vec{a} - p\vec{c}, \quad \overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\vec{b} + \left(\frac{1}{2} - p\right)\vec{c}$$

(2)

$\overrightarrow{OQ} = (1-p)\overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{OB}$ より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= (1-p)\vec{a} + p\vec{b} - p\vec{c}\end{aligned}$$

となる。ここで(1)より、 $\overrightarrow{PQ}$ の $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の係数に注目して

$$\begin{aligned}2(1-p)\overrightarrow{PM} &= 2(1-p)\left(\frac{1}{2}\vec{a} - p\vec{c}\right) \\ &= (1-p)\vec{a} - 2p(1-p)\vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2p\overrightarrow{PN} &= 2p\left\{\frac{1}{2}\vec{b} + \left(\frac{1}{2} - p\right)\vec{c}\right\} \\ &= p\vec{b} + p(1-2p)\vec{c}\end{aligned}$$

であるから、 $\overrightarrow{PQ}$ を $\overrightarrow{PM}$ と $\overrightarrow{PN}$ で表すと、

$$\overrightarrow{PQ} = 2(1-p)\overrightarrow{PM} + 2p\overrightarrow{PN}$$

となる。ここで、 $\overrightarrow{PM}$ と $\overrightarrow{PN}$ は平行ではなく、 $\overrightarrow{PM} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{PN} \neq \vec{0}$ であるから、点 Q は 3 点 P, M, N を通る平面上にある。

(証明終)

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)	①	②
	-28160	42240
(2)	③	
	172	
(3)	④	⑤
	$\frac{2ar}{a^2-r^2}$	$-\frac{2r(a+b)(ab-r^2)}{(ab+ar+br-r^2)(ab-ar-br-r^2)}$

〔解説〕

(1)

二項定理より、 $(x-2)^{11}$ の x^2 の係数は ${}_{11}C_2(-2)^9 = -28160$ であり、 x^3 の係数は

$${}_{11}C_3(-2)^8 = 42240 \text{ となる。}$$

(2)

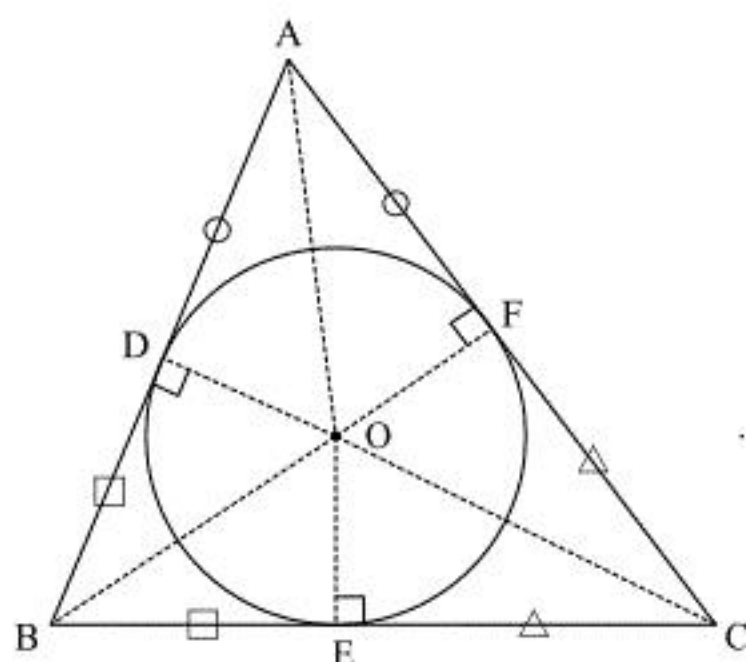
二項定理より、

$$\begin{aligned} 28^{11} &= (30-2)^{11} \\ &= (-2)^{11} + {}_{11}C_1 \cdot 30 \cdot (-2)^{10} + 900 \cdot \sum_{k=2}^{11} {}_{11}C_k \cdot 30^{k-2} \cdot (-2)^{11-k} \\ &= (-2+11 \cdot 30) \cdot (-2)^{10} + 900 \cdot \sum_{k=2}^{11} {}_{11}C_k \cdot 30^{k-2} \cdot (-2)^{11-k} \\ &= 328 \cdot (124+900) + 900 \cdot \sum_{k=2}^{11} {}_{11}C_k \cdot 30^{k-2} \cdot (-2)^{11-k} \\ &= 40672 + 900 \left\{ 328 + \sum_{k=2}^{11} {}_{11}C_k \cdot 30^{k-2} \cdot (-2)^{11-k} \right\} \\ &= 172 + 900 \left\{ 45 + 328 + \sum_{k=2}^{11} {}_{11}C_k \cdot 30^{k-2} \cdot (-2)^{11-k} \right\} \end{aligned}$$

となるから、求める余りは172 である。

(3)

内接円の中心を O とし、円と辺 AB, BC, CA との接点をそれぞれ点 D, E, F とする。円は三角形に内接するので、 $AD=AF$ 、 $BD=BE$ 、 $CE=CF$ である。



よって、 $BC=(AB-AD)+(AC-AF)$ となるから、 AD の長さは

$$AD = \frac{1}{2}(AB+CA-BC) = \frac{1}{2}\{(a+b)+(c+a)-(b+c)\} = a$$

と表せる。ここで、

$$\tan \angle DAO = \frac{OD}{AD} = \frac{r}{a}$$

であり、内接円の定義より、 $\angle BAC = 2 \times \angle DAO$ であるから

$$\begin{aligned} \tan \angle BAC &= \tan 2 \angle DAO \\ &= \frac{2 \tan \angle DAO}{1 - \tan^2 \angle DAO} \\ &= \frac{2ar}{a^2 - r^2} \end{aligned}$$

となる。同様にして、 $\tan \angle ABC = \frac{2br}{b^2 - r^2}$ であり、 $\angle BCA = \pi - (\angle BAC + \angle ABC)$ より、

$$\begin{aligned} \tan \angle BCA &= \tan \{ \pi - (\angle BAC + \angle ABC) \} \\ &= -\tan (\angle BAC + \angle ABC) \\ &= -\frac{\frac{2ar}{a^2 - r^2} + \frac{2br}{b^2 - r^2}}{1 - \frac{2ar}{a^2 - r^2} \cdot \frac{2br}{b^2 - r^2}} \\ &= -\frac{2r(a+b)(ab-r^2)}{(ab+ar+br-r^2)(ab-ar-br-r^2)} \end{aligned}$$

となる。

【Ⅳ】

〔解答〕

(1)	①
	$\frac{1}{8}$
(2)	②
	$\frac{5}{54}$
(3)	③
	$\frac{7}{216}$
(4)	④
	$\frac{1}{12}$
(5)	⑤
	$\frac{1}{27}$

〔解説〕

(1)

与えられた条件を満たす a, b, c の組み合わせは

$$(1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (3, 3, 4)$$

の6通りである。これらの数字の並び方は、同じ数字を2つ含む場合に3通り、すべて異なる数字の場合に6通り存在するから、求める確率は

$$\frac{3 \cdot 3 + 6 \cdot 3}{6^3} = \frac{1}{8}$$

である。

(2)

$a+b+c=15$ を満たす a, b, c の組み合わせは $(3, 6, 6), (4, 5, 6), (5, 5, 5)$ である。 $a+b+c=16$ を満たす a, b, c の組み合わせは $(4, 6, 6), (5, 5, 6)$ である。 $a+b+c=17$ を満たす a, b, c の組み合わせは $(5, 6, 6)$ である。 $a+b+c=18$ を満たす a, b, c の組み合わせは $(6, 6, 6)$ である。(1)と同様に、これらの数字の並び方を考えると、3つの数字がすべて同じ場合の並び方は1通りであるから、求める確率は

$$\frac{6+3 \cdot 4+1 \cdot 2}{216} = \frac{5}{54}$$

である。

(3)

与えられた条件を満たす a, b, c の組み合わせは $(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3)$ である。これらの数字の並び方を考えると、求める確率は

$$\frac{3 \cdot 2 + 1 \cdot 1}{216} = \frac{7}{216}$$

である。

(4)

与えられた条件を変形すると、

$$2 \leq \log_2 a + \log_2 b + \log_2 c < 3$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq \log_2 abc < 3$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq abc < 8$$

となる。この条件を満たす a, b, c の組み合わせは

$$(1, 1, 4), (1, 1, 5), (1, 1, 6), (1, 2, 2), (1, 2, 3)$$

であり、これらの数字の並び方を考えると、求める確率は

$$\frac{6 \cdot 1 + 3 \cdot 4}{216} = \frac{1}{12}$$

である。

(5)

公比が1のとき、 $(a, b, c) = (1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6)$ が条件を満たす。一方、公比が1でないとき、 $(a, b, c) = (1, 2, 4), (4, 2, 1)$ が条件を満たす。以上より、求める確率は

$$\frac{8}{216} = \frac{1}{27}$$

である。