

【I】

(1)

与式に $x=0$ を代入して

$$\begin{aligned} e^0 f(0) &= e^{2 \cdot 0} + \int_0^0 e^t f(t) dt \\ \Leftrightarrow 1 \cdot f(0) &= 1 + 0 \\ \therefore f(0) &= 1 \end{aligned}$$

を得る。

(答) $f(0)=1$

(2)

与式を x で微分すると

$$\begin{aligned} (e^x)' f(x) + e^x f'(x) &= 2e^{2x} + e^x f(x) \\ \Leftrightarrow e^x f(x) + e^x f'(x) &= 2e^{2x} + e^x f(x) \\ \therefore f'(x) &= 2e^x \end{aligned}$$

となる。この積分を考えると

$$f(x) = 2e^x + C$$

となる。ここで C は積分定数である。(1)の結果より、 $x=0$ を代入すると

$$\begin{aligned} f(0) &= 2e^0 + C \\ \Leftrightarrow 1 &= 2 + C \\ \therefore C &= -1 \end{aligned}$$

を得ることから

$$f(x) = 2e^x - 1$$

がわかる。

(答) $f'(x) = 2e^x, f(x) = 2e^x - 1$

(3)

$y=f(x)$ は $y=2e^x$ を y 方向に -1 平行移動したものであるため、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} y &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y &= -1 \end{aligned}$$

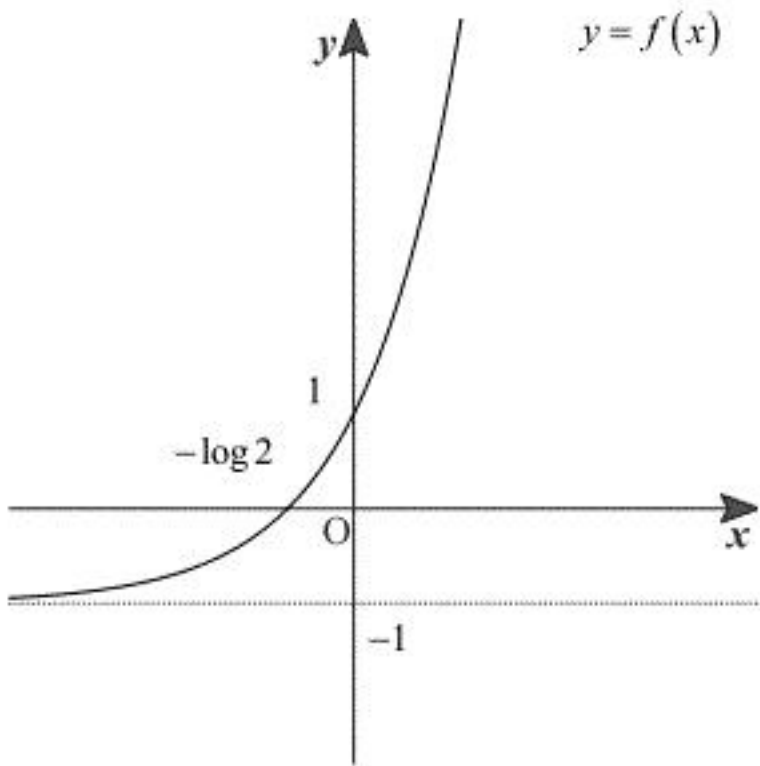
である。また、 x 軸との交点は $y=0$ より

$$\begin{aligned} 0 &= 2e^x - 1 \\ \Leftrightarrow e^x &= \frac{1}{2} \\ \therefore x &= \log \frac{1}{2} = -\log 2 \end{aligned}$$

であり、 y 軸との交点は $x=0$ より

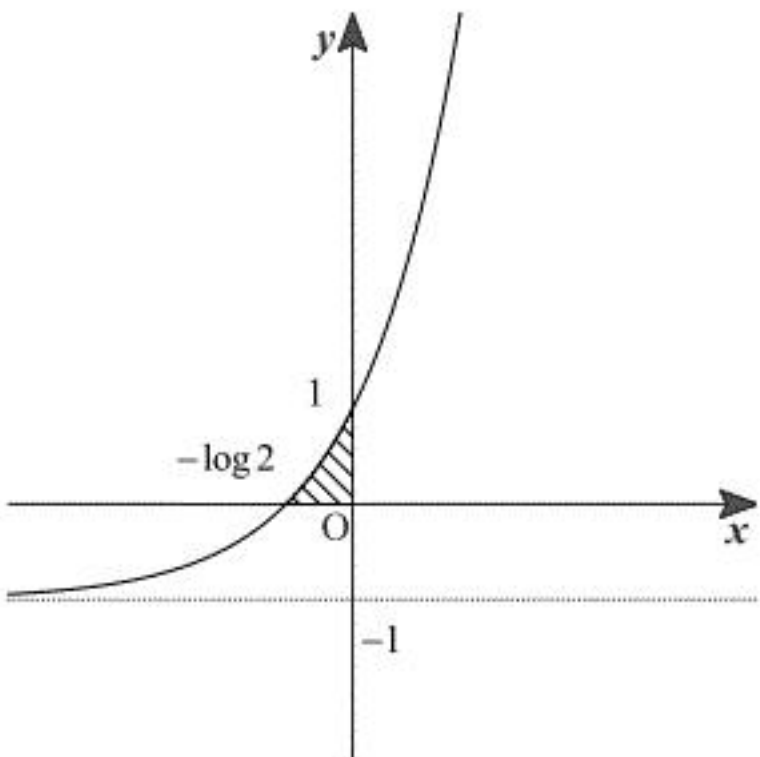
$$y = 2e^0 - 1 = 1$$

である。よって、グラフの概形は以下ようになる。



(答) 前図

(4)



$y=f(x)$ のグラフと x 軸、 y 軸で囲まれた図形は、上のグラフの斜線部である。また、 $y=f(x)$ は

$$y+1=2e^x$$

であり、この両辺は正であるから、自然対数をとると

$$\begin{aligned} \log(y+1) &= \log(2e^x) \\ \Leftrightarrow x &= \log \frac{y+1}{2} \end{aligned}$$

と表せる。これより、求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 x^2 dy \\ &= \pi \int_0^1 \left(\log \frac{y+1}{2} \right)^2 dy \end{aligned}$$

となる。ここで、 $t = \frac{y+1}{2}$ とすると積分範囲は

y	0	$\rightarrow$	1
t	$\frac{1}{2}$	$\rightarrow$	1

である。また、 $\frac{dy}{dt} = 2$ であるから

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 (\log t)^2 \cdot 2 dt \\ &= 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^1 (\log t)^2 dt \end{aligned}$$

となる。ここで、 C を積分定数として

$$\begin{aligned} \int (\log t)^2 dt &= \int t' (\log t)^2 dt \\ &= t (\log t)^2 - 2 \int \log t dt \\ &= t (\log t)^2 - 2t \log t + 2t + C \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \left[t (\log t)^2 - 2t \log t + 2t \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \pi \{ 2 - (\log 2)^2 - 2 \log 2 \} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\pi \{ 2 - (\log 2)^2 - 2 \log 2 \}$

【Ⅲ】

【解答】

	①	②	③	④		
(1)	$\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$		
(2)	⑤	⑥				
	(0, 1)	$x+1$				
(3)	⑦					
	$\frac{3}{2}-\frac{3}{8}\pi$					

【解説】

(1)

x, y をそれぞれ θ で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= -\sin\theta\cos\theta + (1+\cos\theta)(-\sin\theta) \\ &= -\sin\theta(2\cos\theta+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta} &= -\sin\theta\sin\theta + (1+\cos\theta)\cos\theta \\ &= -\sin^2\theta + \cos^2\theta + \cos\theta \\ &= 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 \\ &= (2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)\end{aligned}$$

となる。また、 $0 \leq \theta \leq \pi$ であるため、増減表をかくと以下ようになる。

θ	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	π
$\frac{dx}{d\theta}$		-	-	-	0	+	
x	2		$\frac{3}{4}$		$-\frac{1}{4}$		0
$\frac{dy}{d\theta}$		+	0	-	-	-	
y	0		$\frac{3\sqrt{3}}{4}$		$\frac{\sqrt{3}}{4}$		0

これより、 x は $\theta = \frac{2}{3}\pi$ のとき最小値 $-\frac{1}{4}$ をとり、 y は $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ をとる。

(2)

AP の距離を d とすると

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{\{(1+\cos\theta)\cos\theta-1\}^2 + \{(1+\cos\theta)\sin\theta\}^2} \\ &= \sqrt{(1+\cos\theta)^2\cos^2\theta - 2(1+\cos\theta)\cos\theta + 1 + (1+\cos\theta)^2\sin^2\theta} \\ &= \sqrt{(1+\cos\theta)^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 2(1+\cos\theta)\cos\theta + 1} \\ &= \sqrt{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta-2\cos\theta)+1} \\ &= \sqrt{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)+1} \\ &= \sqrt{2-\cos^2\theta}\end{aligned}$$

となる。 $0 \leq \theta \leq \pi$ より $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ であるから、 $\cos\theta = 0$ のとき、つまり $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき d が

最大となる。 $\theta = \frac{\pi}{2}$ では

$$\begin{aligned}x &= \left(1+\cos\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2} = 0 \\ y &= \left(1+\cos\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2} = 1\end{aligned}$$

であるから、P(0, 1) となる。このとき、P での曲線 C の接線の傾きは

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \\ &= \frac{2\cos^2\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - 1}{-\sin\frac{\pi}{2}\left(2\cos\frac{\pi}{2} + 1\right)} \\ &= \frac{-1}{-1} \\ &= 1\end{aligned}$$

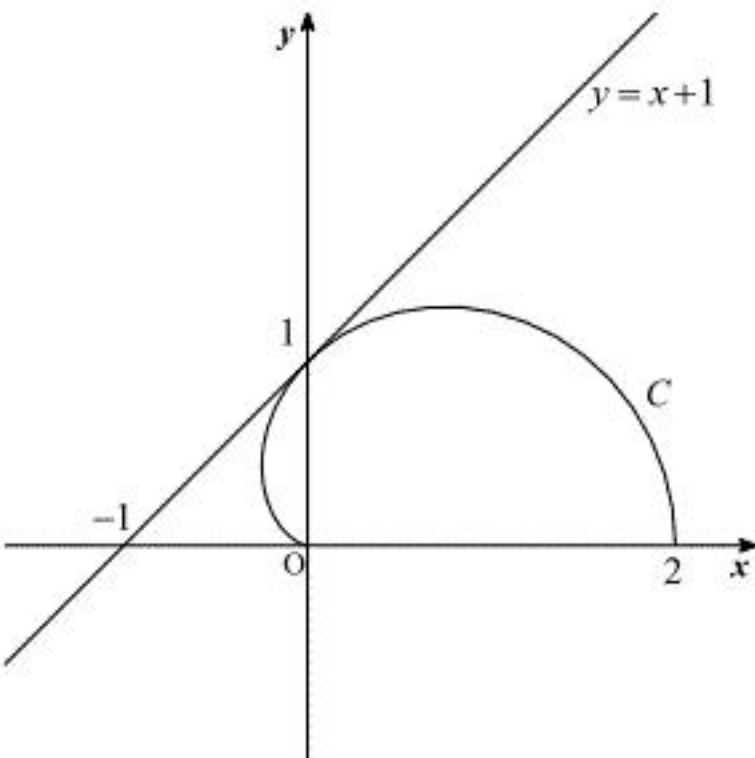
であるから、接線の方程式は

$$\begin{aligned}y &= 1 \cdot (x-0) + 1 \\ \therefore y &= x+1\end{aligned}$$

となる。

(3)

(1)の増減表より、グラフの概形は以下ようになる。



C と y 軸の囲む面積 S_1 は、

$$S_1 = \int_0^1 |x| dy$$

である。 θ で置換すると

y	0	→	1
θ	π	→	$\frac{\pi}{2}$

であるから

$$\begin{aligned}S_1 &= \int_0^1 (-x) dy \\ &= -\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos\theta)\cos\theta \cdot (2\cos^2\theta + \cos\theta - 1) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2\cos^4\theta + 3\cos^3\theta - \cos\theta) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left\{ 2\cos^2\theta(1-\sin^2\theta) + 3\cos\theta(1-\sin^2\theta) - \cos\theta \right\} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2\cos^2\theta - 2\cos^2\theta\sin^2\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta + 2\cos\theta) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(2\cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta + 2\cos\theta \right) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left\{ 2\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right) - 3\sin^2\theta\cos\theta + 2\cos\theta \right\} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{1}{4}\cos 4\theta + \cos 2\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta + 2\cos\theta + \frac{3}{4} \right) d\theta \\ &= \left[\frac{1}{16}\sin 4\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta - \sin^3\theta + 2\sin\theta + \frac{3}{4}\theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= \frac{3}{8}\pi - 1\end{aligned}$$

となる。よって、求める面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 - S_1 \\ &= \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{8}\pi - 1 \right) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{3}{8}\pi\end{aligned}$$

である。

【IV】

【解答】

	①	②
(1)	$\frac{1}{21}$	$\frac{17}{42}$
	③	④
(2)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{10}$
	⑤	⑥
(3)	$0 \leq Y \leq 2$	$10^{\frac{5}{4}}$
	⑦	⑧
(4)	$\frac{\pi}{4}$	$-2+i$

【解説】

(1)

10 枚の中から 4 枚を選ぶ組み合わせは

$$_{10}\mathrm{C}_4=210 \text{ (通り)}$$

ある。4 枚の中で、最大の数が 6 であるときは 6 と 5 以下の数を 3 枚選んだときなので

$$_5\mathrm{C}_3=10 \text{ (通り)}$$

ある。よって、最大の数が 6 である確率は

$$\frac{10}{210}=\frac{1}{21}$$

である。また、最大が 8 以下である組み合わせは

$$_8\mathrm{C}_4=70 \text{ (通り)}$$

あり、最小が 3 以上である組み合わせは

$$_8\mathrm{C}_4=70 \text{ (通り)}$$

ある。最大が 8 以下でかつ最小が 3 以上である組み合わせは

$$_6\mathrm{C}_4=15 \text{ (通り)}$$

である。以上より、最大が 9 以上で、かつ最小が 2 以下である確率は

$$1-\frac{70+70-15}{210}=\frac{85}{210}=\frac{17}{42}$$

である。

(2)

OA=OB=AB=1 より△ OAB は正三角形であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\frac{\pi}{3}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。同様にして

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}$$

となる。点 M は辺 OA の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

となるため、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MC}}&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}\\&=-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

と表せる。ここで、AC=√2 であるから、OA=OC=1 と合わせて∠AOC=π2 である。したが

って

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{MC}}|&=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2}\\&=\sqrt{\frac{1}{4}+1}\\&=\frac{\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MC}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\&=-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

である。よって

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{MC}}|}=\frac{\frac{1}{4}}{1\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$$

となる。

(3)

$y\neq 0$ であるため、 $xy^2=10^5$ より

$$x=\frac{10^5}{y^2}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\frac{10^5}{y^2}&\geq 10\\&\Leftrightarrow 10^4\geq y^2\end{aligned}$$

となる。これと $y\geq 1$ より

$$1\leq y\leq 10^2$$

である。この常用対数をとると

$$\log_{10}1\leq \log_{10}y\leq \log_{10}10^2$$

$$\Leftrightarrow 0\leq Y\leq 2$$

となる。また

$$\begin{aligned}\log_{10}x\cdot\log_{10}y&=\log_{10}\frac{10^5}{y^2}\cdot\log_{10}y\\&=(5-2Y)Y\\&=-2\left(Y-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{25}{8}\end{aligned}$$

であり、 $0\leq Y\leq 2$ の範囲で、 $\log_{10}x\cdot\log_{10}y$ は $Y=\frac{5}{4}$ のとき最大となる。このとき

$$y=10^{\frac{5}{4}}$$

であり、 $xy^2=10^5$ より

$$\begin{aligned}\frac{x}{y}&=\frac{10^5}{y^3}\\&=\frac{10^5}{10^{\frac{15}{4}}}\\&=10^{\frac{5}{4}}\end{aligned}$$

となる。

(4)

問題文より

$$\begin{aligned}\frac{z_2}{z_1}&=\frac{-1+3i}{1+2i}\\&=\frac{(-1+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}\\&=\frac{5+5i}{5}\\&=1+i\\&=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

となるので

$$\arg\frac{z_2}{z_1}=\frac{\pi}{4}$$

とわかる。これより

$$\arg z_2-\arg z_1=\frac{\pi}{4}$$

である。したがって、

$$\angle\mathrm{POQ}=\frac{\pi}{4}$$

である。ここで、直線 OQ に対して点 P, R は対称であるため、

$$\begin{aligned}\mathrm{OP}&=\mathrm{OR}\\\angle\mathrm{POQ}&=\angle\mathrm{ROQ}\end{aligned}$$

である。これより、

$$\angle\mathrm{POR}=2\angle\mathrm{POQ}=\frac{\pi}{2}$$

となるため、点 R は点 P を原点を中心にπ2 回転させた点であるから

$$\begin{aligned}z_1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)&=(1+2i)i\\&=-2+i\end{aligned}$$

と表せる。