〔Ⅰ〕

(1)

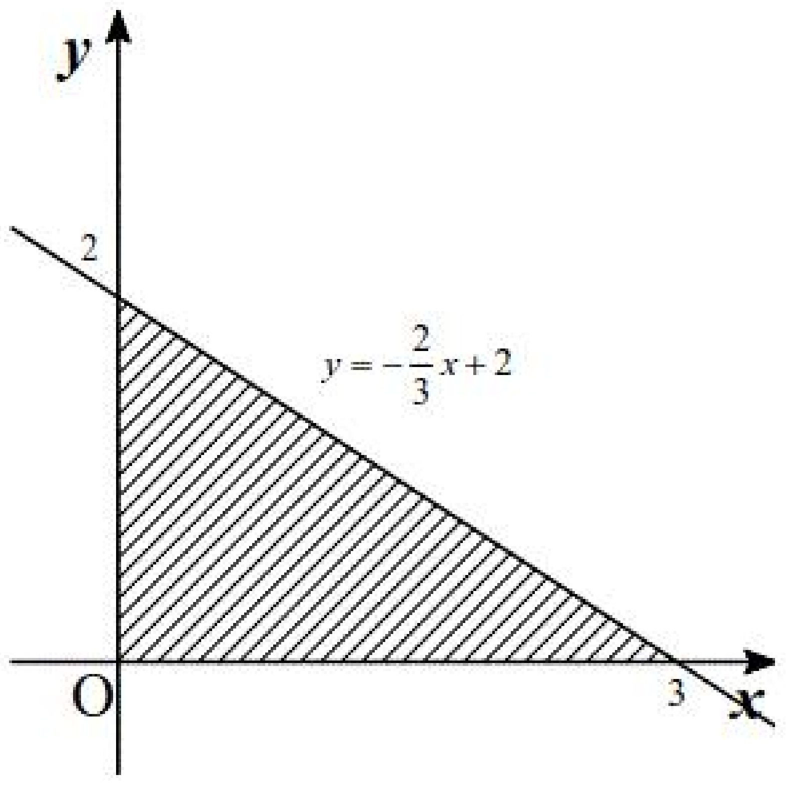
$$2|x|+3|y| \leqq 6$$

について，この不等式は $x \to -x$，$y \to -y$ という変換に対して不変であるから，表す領域は x 軸，y 軸に関して対称である。そこで，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のときを考えると，

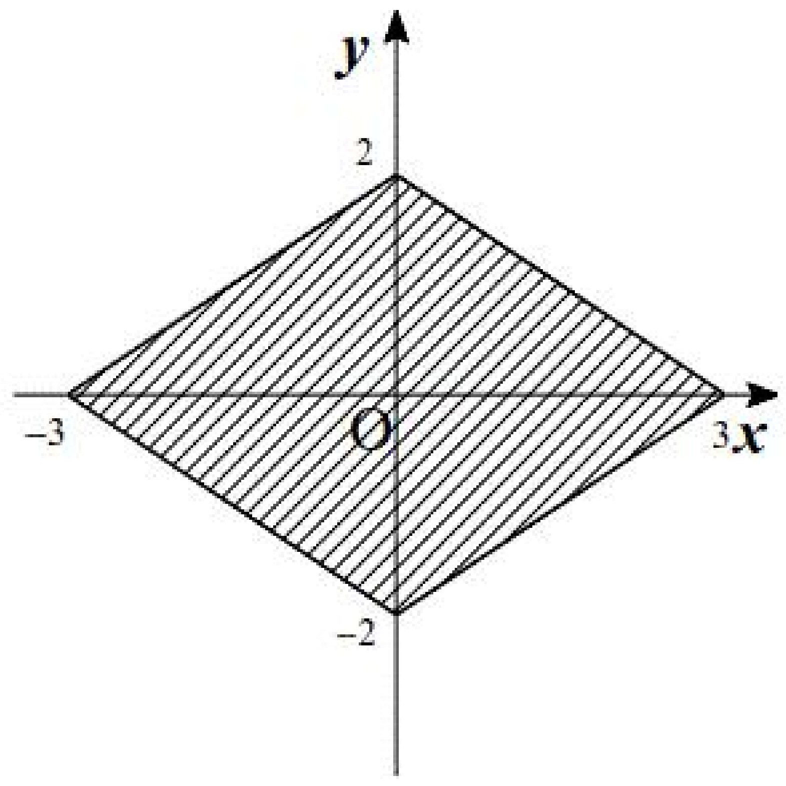
$$2x+3y \leqq 6$$

$$\Leftrightarrow y \leqq -\frac{2}{3}x+2 \qquad \cdot\cdot\cdot①$$

となる。$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のもとで①の表す領域は下図の斜線部分である。

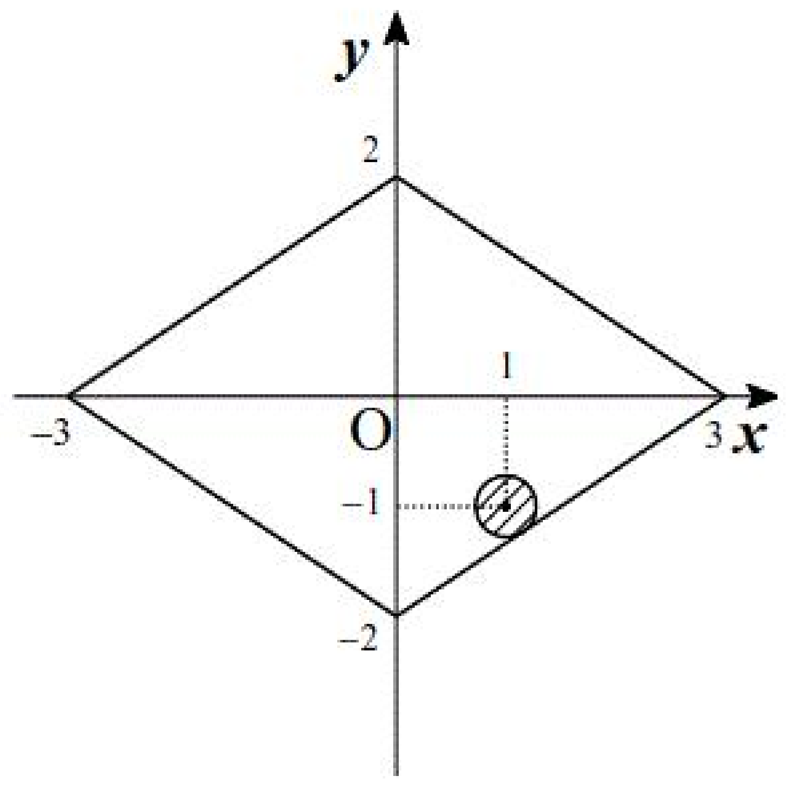


x 軸，y 軸に関する対称性を考慮すると，求める領域は下図の斜線部分(境界を含む)である。



(答) 前図(境界を含む)

(2)



$(x-1)^2+(y+1)^2 \leqq r^2$ は中心 $(1,-1)$，半径 r の円の周および内部の領域を表す。

「$(x-1)^2+(y+1)^2 \leqq r^2$ ならば $2|x|+3|y| \leqq 6$ である」

が成り立つには，円が(1)で求めた領域の中に存在すればよい。r が最大となるのは，上図のように円が直線 $y=\frac{2}{3}x-2$ に接するときである。このとき，点 $(1,-1)$ と直線

$y=\frac{2}{3}x-2 \Leftrightarrow 2x-3y-6=0$ との距離が r であるから，r の最大値は，

$$r=\frac{|2\cdot 1-3\cdot(-1)-6|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{1}{\sqrt{13}}$$

と求まる。

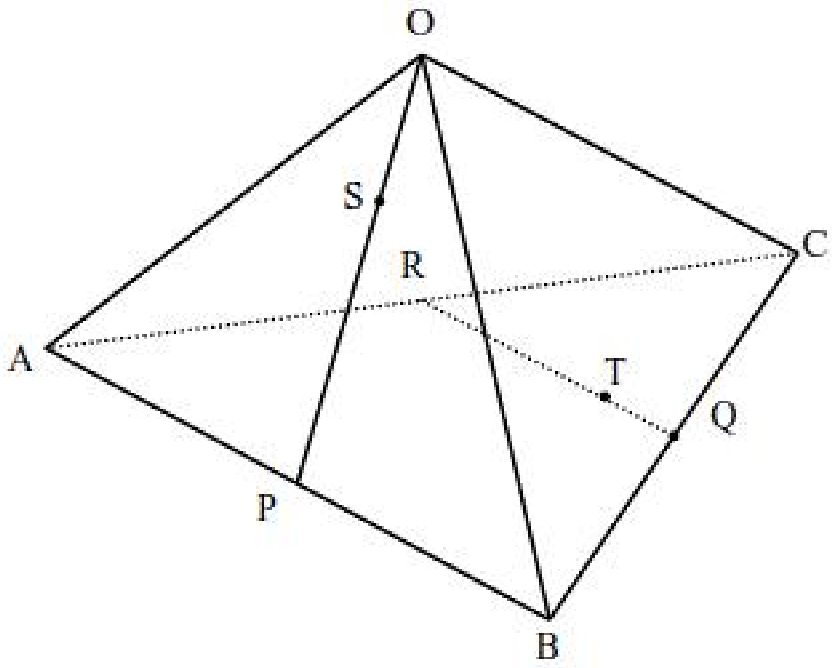
(答) $\frac{1}{\sqrt{13}}$

〔Ⅱ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤
$\dfrac{-s+t}{2}$	$\dfrac{1-s-t}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$

〔解説〕



$\triangle$OABはOA＝OBの二等辺三角形であるから，$\angle \mathrm{OPA}=90^\circ$である。したがって，

$$\mathrm{OP}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AP}^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-1}=1$$

であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{s}{1}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}=\frac{s}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

と表せる。また，点Q, Rは辺BC, ACの中点であるので$\mathrm{QR}\ /\!/\ \mathrm{BA}$，$\mathrm{QR}=1$である。よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{QT}}=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{QT}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{QR}}\right|}\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\frac{t}{1}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{2}=\frac{t}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

である。したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QT}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}+\frac{t}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\frac{t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1-t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

と表せる。よって，$\overrightarrow{\mathrm{ST}}$は，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{ST}}&=\overrightarrow{\mathrm{OT}}-\overrightarrow{\mathrm{OS}}\\&=\left(\frac{t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1-t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)-\frac{s}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\\&=\frac{-s+t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1-s-t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

と求まる。ここで，$\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2=\mathrm{AB}^2=4$であるから，$\triangle$AOBは$\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$である直角二等辺三角形となっている。同様に，$\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=90^\circ$である。したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

である。$\overrightarrow{\mathrm{ST}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}, \overrightarrow{\mathrm{ST}}\perp\overrightarrow{\mathrm{QR}}$のとき，$\overrightarrow{\mathrm{ST}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0, \overrightarrow{\mathrm{ST}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=0$であるから，

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{ST}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0\\&\Leftrightarrow\left(\frac{-s+t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1-s-t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}=0\\&\Leftrightarrow\frac{-s+t}{4}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+\frac{1-s-t}{4}\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=0\\&\Leftrightarrow(-s+t)\left(\sqrt{2}\right)^2+(1-s-t)\left(\sqrt{2}\right)^2=0\\&\Leftrightarrow 1-2s=0\\&\therefore s=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{ST}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=0\\&\Leftrightarrow\left(\frac{-s+t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1-s-t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{2}=0\\&\Leftrightarrow-\frac{-s+t}{4}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+\frac{1-s-t}{4}\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=0\\&\Leftrightarrow(s-t)\left(\sqrt{2}\right)^2+(1-s-t)\left(\sqrt{2}\right)^2=0\\&\Leftrightarrow 1-2t=0\\&\therefore t=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

と求まる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)	①	②		
	-4	-4		
(2)	③	④	⑤	⑥
	$2\cdot(-4)^{k-1}$	0	$(-4)^k$	$2\cdot(-4)^k$

〔解説〕

(1)

(a)

$$\begin{aligned}(1+i)^4&=\left\{(1+i)^2\right\}^2\\&=(1+2i-1)^2\\&=-4\end{aligned}$$

と求まる。

(b)

$$\begin{aligned}(1-i)^4&=\left\{(1-i)^2\right\}^2\\&=(1-2i-1)^2\\&=-4\end{aligned}$$

と求まる。

(2)

(1)を利用してそれぞれを計算すると，

$$\begin{aligned}a_{4k-3}&=(1+i)^{4k-3}+(1-i)^{4k-3}\\&=(1+i)(1+i)^{4(k-1)}+(1-i)(1-i)^{4(k-1)}\\&=(-4)^{k-1}\left\{(1+i)+(1-i)\right\}\\&=2\cdot(-4)^{k-1}\\a_{4k-2}&=(1+i)^{4k-2}+(1-i)^{4k-2}\\&=(1+i)^2(1+i)^{4(k-1)}+(1-i)^2(1-i)^{4(k-1)}\\&=(-4)^{k-1}\left\{2i+(-2i)\right\}\\&=0\\a_{4k-1}&=(1+i)^{4k-1}+(1-i)^{4k-1}\\&=(1+i)^3(1+i)^{4(k-1)}+(1-i)^3(1-i)^{4(k-1)}\\&=(-4)^{k-1}\left\{2i(1+i)-2i(1-i)\right\}\\&=-4\cdot(-4)^{k-1}\\&=(-4)^k\\a_{4k}&=(1+i)^{4k}+(1-i)^{4k}\\&=(-4)^k+(-4)^k\\&=2\cdot(-4)^k\end{aligned}$$

と求まる。