2016 年 度 入 学 試 験 問 題

数　学

注　意　事　項

1．試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。

2．解答はすべて黒鉛筆(ＨＢ)〈シャープペンシルは，ＨＢ 0.5 mm以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。

3．解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し，切取線から切り離してください。

4．試験時間は 100 分です。

5．問題は 4 ページで大問 4 問です。余白は計算用紙です。

6．解答用紙は両面になっています。

〔Ⅰ〕 xy 平面上に楕円 $C: \dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ がある。y 軸上の点 P$(0,\ t)$ $(t>1)$ を通り，C と第 1 象限で接する接線を l とする。l と C の接点を R とし，l と x 軸の交点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1) l の方程式を求めよ。また，点 R および Q の座標を求めよ。

(2) 点 P が $t>1$ の範囲で動くとき，線分 PQ の長さの最小値，およびそのときの t の値を求めよ。

(3) 前問(2)において線分 PQ の長さが最小になるとき，x 軸と線分 RQ と楕円 C で囲まれた領域の面積を求めよ。

〔II〕 各辺の長さが1の正四面体OABCの辺BCの中点をDとする。また，辺OA上に$\mathrm{OP}=t\ (0<t\leqq 1)$となる動点Pをとる。さらに，線分PDを$n+1$等分する分点の列をPより近い順に並べて$\mathrm{M}_1$, M_2, ……, M_nと表す。このとき，次の $\boxed{}$ をうめよ。

$\mathrm{BD}=\mathrm{DC}=\dfrac{1}{2}$であるから，$\mathrm{OD}=\boxed{①}$である。三角形OADにおいて$\mathrm{OD}=\mathrm{DA}$であるから，辺OAと線分ODのなす角を$\theta$とすれば$\cos\theta=\boxed{②}$となる。$k=1, 2, \cdots\cdots, n$に対して，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OM}_k}$を$t$, n, kとベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}_k}=\boxed{③}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{k}{n+1}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

である。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\boxed{④}$であるから，$|\overrightarrow{\mathrm{OM}_k}|^2$は，$t$, n, kを用いて

$$|\overrightarrow{\mathrm{OM}_k}|^2=t^2+\frac{k}{n+1}\left(\boxed{⑤}\right)+\frac{k^2}{(n+1)^2}\left(\boxed{⑥}\right)$$

と表される。ここで，$\boxed{⑤}$と$\boxed{⑥}$はtの式である。したがって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\overrightarrow{\mathrm{OM}_k}|^2=\boxed{⑦}$$

である。$0<t\leqq 1$の範囲でtが動くとき，$\boxed{⑦}$のとりうる値の範囲は$\boxed{⑧}<\boxed{⑦}\leqq\boxed{⑨}$である。

〔III〕 実数の定数 a, b が $0 < b < a^2$, $0 < a$ を満たすものとし,

$$f(x) = \sqrt{bx^2 + 1} - ax$$

とおくとき，次の問いに答えよ。ただし，(2)〜(4)の解答は記述欄に記入すること。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は $f'(x) = \boxed{\quad ① \quad} - a$ であり，第 2 次導関数 $f''(x)$ は $f''(x) = \dfrac{\boxed{\quad ② \quad}}{(bx^2 + 1)\sqrt{bx^2 + 1}}$ である。$\boxed{\qquad}$ をうめよ。

(2) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ を示せ。

(3) $-\infty < x < \infty$ に対して $f'(x) < 0$ となることを示せ。

(4) 上で与えられた実数 a, b が $a^2 - 1 = b$ の関係を満たすとき，曲線 $y = f(x)$ と x 軸と y 軸で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を a を用いて表せ。

〔Ⅳ〕 次の $\boxed{}$ をうめよ。

(1) a，b を実数の定数とする。3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + 2a = 0$ が 2 重解 1 をもつとき，もう 1 つの解は $\boxed{\ ①\ }$ である。

(2) $a_1 = 1$，$a_{n+1} = 2a_n + \dfrac{n+2}{n(n+1)}$ ($n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$) によって定められる数列 $\{ a_n \}$ の一般項は $a_n = \boxed{\ ②\ }$ である。

(3) 整数 x，y が $5x + 7y = 1$，$x + y \leqq 100$ を満たす範囲で動くとき，$2x + y$ の最大値は $\boxed{\ ③\ }$ である。

(4) xy 平面上の点 A $(0,\ 2)$，B$\left(\dfrac{6}{7},\ \dfrac{10}{7}\right)$ をとるとき，線分 AB を $7 : n$ に外分する点の位置ベクトルが点 A の位置ベクトルと直交するのは $n = \boxed{\ ④\ }$ のときである。

(5) 虚数 $\alpha = \dfrac{\sqrt{3} + i}{2}$ に対して $\alpha^n + \dfrac{1}{\alpha^n} = -2$ が成り立つような自然数 n で $1 \leqq n \leqq 100$ を満たすものは，全部で $\boxed{\ ⑤\ }$ 個ある。ここで i は虚数単位である。

(6) $a > 0$ とする。xy 平面内の曲線 C : $(x(t),\ y(t)) = (2t,\ e^t + e^{-t})$ $(0 \leqq t \leqq a)$ の長さ $l(a)$ は a を用いて $l(a) = \boxed{\ ⑥\ }$ と表され，$l(a) = \dfrac{3}{2}$ となるのは $a = \boxed{\ ⑦\ }$ のときである。

(以上)