

2016 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 100 分です。
5. 問題は 4 ページで大問 4 問です。余白は計算用紙です。
6. 解答用紙は両面になっています。

〔 I 〕 p, q を実数とし、 i は虚数単位とする。複素数平面上の点 $P(4 + pi)$ は点 $A(2i)$ と点 $B(2 + 3i)$ を通る直線上にある。また、点 $Q(q + qi)$ は線分 QA と線分 QP が直交する位置にある。次の問いに答えよ。

- (1) p および q の値を求めよ。
- (2) $|z - (q + qi)| = 2|z - (4 + pi)|$ を満たす複素数 z 全体の表す図形を求め、図示せよ。
- (3) z が (2) で定められた図形上にあり、 $z, 10 + 10i - z$ と $3 + 3i$ の 3 点が三角形を作るとき、その三角形の面積が最大となる z の値を求めよ。

〔Ⅱ〕 次の をうめよ。

空間内で、原点 O と 3 点 A, B, C を頂点とする四面体 $OABC$ を考える。
三角形 ABC の内心、すなわち 3 つの内角の 2 等分線の交点を I とし、直線 BI と辺 AC の交点を D とする。三角形 ABC の各辺の長さをそれぞれ $AB = p$, $BC = q$, $CA = r$ とおく。このとき、 $\angle ABD = \angle CBD$ であるから、ベクトル $\overrightarrow{AD}$ は、 p と q を用いて

$$\overrightarrow{AD} = \text{①} \overrightarrow{AC}$$

と表される。 $\overrightarrow{AD}$ の長さ $|\overrightarrow{AD}|$ は p, q, r を用いて

$$|\overrightarrow{AD}| = \text{②}$$

と表される。したがって、ベクトル $\overrightarrow{AI}$ は、 p, q, r を用いて

$$\overrightarrow{AI} = \text{③} \overrightarrow{AB} + \text{④} \overrightarrow{AC}$$

と表される。また、ベクトル $\overrightarrow{OI}$ は p, q, r を用いて

$$\overrightarrow{OI} = \text{⑤} \overrightarrow{OA} + \text{⑥} \overrightarrow{OB} + \text{⑦} \overrightarrow{OC}$$

と表される。特に、 A, B, C の座標が $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ で与えられたとき、 I の x 座標は a, b, c を用いて ⑧ と表される。

〔Ⅲ〕 n を 2 以上の整数とする。関数 $f(x) = x^{2n-1} e^{-x^{2n}}$ について次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $-2 \leq x \leq 2$ の範囲で $f(x)$ の増減表をかき、 $f(x)$ の最大値および最小値を n を用いて表せ。

(3) $n = 2, 3, \dots$ に対して $a_n = n^{-\frac{1}{2n}}$ とする。このとき、極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^{a_n} f(x) dx$$

を求めよ。

〔IV〕 次の をうめよ。

(1) 2 次方程式 $x^2 + 5x + 6 = 0$ の解が $\tan \alpha, \tan \beta$ $\left(|\alpha| < \frac{\pi}{2}, |\beta| < \frac{\pi}{2}\right)$ であるとき、 $\alpha + \beta =$ ① である。

(2) 曲線 $y = \sqrt{x+2}$ と直線 $y = x + a$ が共有点をもつとき、定数 a のとりうる値の範囲は ② であり、共有点の数が 2 個でかつ、その共有点の y 座標がともに正であるとき、 a のとりうる値の範囲は ③ である。

(3) 6 で割ると 3 余り、17 で割ると 5 余る 3 桁の自然数で最大のものは ④ である。

(4) 次の定積分の値を求めると

$$\int_1^{e^2} \frac{1}{\sqrt{x}} \log x \, dx = \text{ ⑤ }, \quad \int_1^{e^2} \frac{1}{\sqrt{x}} (\log x)^2 \, dx = \text{ ⑥ }$$

である。

(5) n 個の正の数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ が等差数列であるとする。 $a_1 = a, a_n = b$

$(a \neq b)$ とするとき、和 $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}}$ は $\frac{\text{ ⑦ }}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ である。

(以上)

