2016年度入学試験問題

数　　学

注　意　事　項

1．試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。

2．解答はすべて黒鉛筆(ＨＢ)〈シャープペンシルは，ＨＢ 0.5 mm以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。

3．解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し，切取線から切り離してください。

4．試験時間は100分です。

5．問題は4ページで大問4問です。余白は計算用紙です。

6．解答用紙は両面になっています。

〔Ⅰ〕 関数 $f(x)$ はすべての実数 x で微分可能であり，等式

$$e^x f(x) = e^{2x} + \int_0^x e^t f(t)dt$$

を満たしている。ただし，e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1) $f(0)$ の値を求めよ。

(2) $f'(x)$ を求めよ。また，$f(x)$ を求めよ。

(3) $y = f(x)$ のグラフの概形を解答欄の座標平面上にかけ。ただし，曲線の凹凸は調べなくてよい。

(4) $y = f(x)$ のグラフと x 軸，y 軸で囲まれた図形を，y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。ただし，$\int \log x\, dx = x\log x - x + C$ (C は積分定数) を用いてよい。

〔Ⅱ〕 数列$\{a_n\}$の第1項から第n項までの和S_nと一般項a_nが

$$S_n = 16 - \frac{3(n+4)}{n}a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

を満たしている。次の $\boxed{}$ をうめよ。

(1) $a_2 = \boxed{①}$ である。

(2) a_{n+1}をa_nとnを用いて表すと，$a_{n+1} = \boxed{②}\ a_n$である。

$\dfrac{a_n}{n} = b_n$とおくと，$b_{n+1} = \boxed{③}\ b_n$である。

したがって，a_nはnを用いて，$a_n = \boxed{④}$ である。

(3) 数列$\{a_n\}$の項のうち，最大値は $\boxed{⑤}$ である。

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \boxed{⑥}$ である。ただし，$|r| < 1$のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \cdot r^n = 0$を用いてよい。

〔Ⅲ〕 O を原点とする座標平面上に，曲線 C 上の点 P$(x,\ y)$ が媒介変数 θ を用いて

$$x = (1 + \cos\theta)\cos\theta$$

$$y = (1 + \cos\theta)\sin\theta$$

によって与えられている。ただし，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする。次の $\boxed{}$ をうめよ。

(1) x は $\theta =$ $\boxed{①}$ のとき最小値 $\boxed{②}$ をとり，y は $\theta =$ $\boxed{③}$ のとき最大値 $\boxed{④}$ をとる。

(2) 2 点 A$(1,\ 0)$ と P の距離が最大となるとき，点 P の座標は $\boxed{⑤}$ である。
また，このときの点 P における曲線 C の接線の方程式は $y =$ $\boxed{⑥}$ である。

(3) (2) で求めた接線と x 軸，曲線 C で囲まれた図形の面積は $\boxed{⑦}$ である。

〔Ⅳ〕 次の $\boxed{}$ をうめよ。

(1) 1から10までの数が書かれたカードが1枚ずつ計10枚ある。この中から同時に4枚を取り出すとき，それらに書かれている数について，最大の数が6である確率は $\boxed{①}$ であり，また，最大の数が9以上で，かつ最小の数が2以下である確率は $\boxed{②}$ である。

(2) 四角錐(すい) OABCD は，底面 ABCD が1辺の長さ1の正方形であり，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{OD}=1$ である。内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の値は $\boxed{③}$ である。また，辺 OA の中点を M とし，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ のなす角を θ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，$\cos\theta$ の値は $\boxed{④}$ である。

(3) 実数 x，y は $x\geqq 10$，$y\geqq 1$，$xy^2=10^5$ を満たしているとする。$Y=\log_{10}y$ とおくとき，Y のとり得る値の範囲は $\boxed{⑤}$ である。また，$\log_{10}x\cdot\log_{10}y$ が最大となるとき，$\dfrac{x}{y}$ の値は $\boxed{⑥}$ である。

(4) O を原点とする複素数平面上で，2つの複素数 $z_1=1+2i$，$z_2=-1+3i$ の表す点をそれぞれ P，Q とする。このとき，偏角 $\arg\dfrac{z_2}{z_1}=$ $\boxed{⑦}$ である。ただし，偏角の範囲は0以上 2π 未満とする。また，直線 OQ に関して，点 P と対称な点 R を表す複素数は $\boxed{⑧}$ である。

(以上)