

【Ⅰ】

(1)

$$\begin{aligned}s^2 + t^2 &= (\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta)^2 \\&= (3 \sin^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) + (3 \cos^2 \theta - 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta) \\&= 4(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\&= 4\end{aligned}$$

と求めることができる。

(答) $s^2 + t^2 = 4$

(2)

三角関数の加法定理より,

$$\begin{aligned}s &= \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta \\&= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta \right) \\&= 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right)\end{aligned}$$

となる。

$$0 \leq \theta \leq \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7}{6} \pi$$

であるから,

$$-\frac{1}{2} \leq \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$$

$$\therefore -1 \leq s \leq 2$$

と求まる。同様に,

$$\begin{aligned}t &= \sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta \\&= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \right) \\&= 2 \cos \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right)\end{aligned}$$

となるので,

$$-1 \leq \cos \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore -2 \leq t \leq \sqrt{3}$$

である。

(答) $-1 \leq s \leq 2, -2 \leq t \leq \sqrt{3}$

(3)

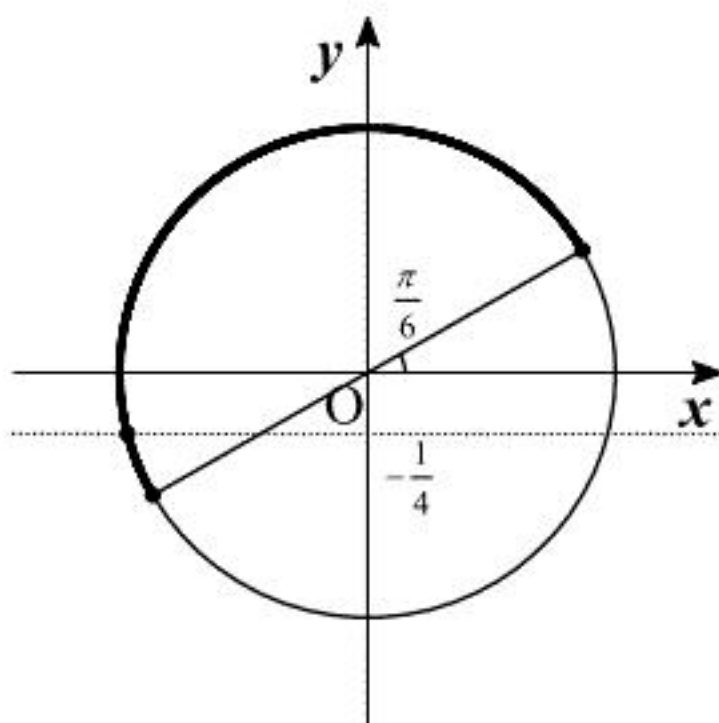
$s = -\frac{1}{2}$ のとき,

$$\sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{s}{2} = -\frac{1}{4}$$

であるから,

$$\cos^2 \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) = 1 - \left(-\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{15}{16}$$

である。



上図より, このとき $\cos \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) < 0$ であるから,

$$\cos \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\therefore t = -\frac{\sqrt{15}}{2}$$

である。また,

$$\begin{cases} s = \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{2} & \dots \textcircled{1} \\ t = \sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta = -\frac{\sqrt{15}}{2} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

であるから, $\textcircled{1} + \textcircled{2} \times \sqrt{3}$ より,

$$\begin{aligned}4 \cos \theta &= -\frac{3\sqrt{5}+1}{2} \\ \therefore \cos \theta &= -\frac{3\sqrt{5}+1}{8}\end{aligned}$$

と求めることができる。

(答) $t = -\frac{\sqrt{15}}{2}, \cos \theta = -\frac{3\sqrt{5}+1}{8}$

〔Ⅱ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥
$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{2}$	8	$\frac{16}{35}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{35}$

〔解説〕

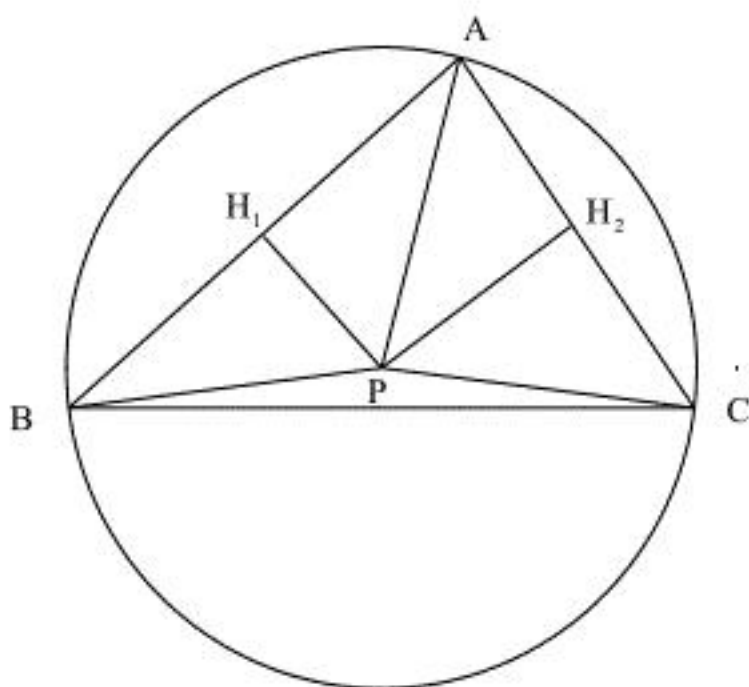
△ABCにおいて、余弦定理を用いることで、

$$\cos \angle CAB = \frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2 \cdot CA \cdot AB} = \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{8}$$

と分かる。よって、

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \angle CAB = 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{2}$$

と求めることができる。



ここで、点Pから直線AB, CAに下した垂線の足をそれぞれH₁, H₂とすると、△PABはAP=BPの二等辺三角形であるから、

$$AH_1 = H_1B, \angle PAB < \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ。よって、

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AP}| \cos \angle PAB = |\overrightarrow{AB}| \cdot \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| = \frac{25}{2}$$

と求めることができる。同様に、△PACはAP=CPの二等辺三角形であるから、

$$AH_2 = H_2C, \angle PAC < \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ。よって、

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AP}| \cos \angle PAC = |\overrightarrow{AC}| \cdot \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC}| = 8$$

と求めることができる。ここで、

$$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

とおくと、

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = s|\overrightarrow{AB}|^2 + t\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 25s + \frac{5}{2}t$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = s\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + t|\overrightarrow{AC}|^2 = \frac{5}{2}s + 16t$$

であるから、

$$\begin{cases} 25s + \frac{5}{2}t = \frac{25}{2} \\ \frac{5}{2}s + 16t = 8 \end{cases}$$

$$\therefore s = \frac{16}{35}, t = \frac{3}{7}$$

を得る。よって、

$$\overrightarrow{AP} = \frac{16}{35}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$$

と表すことができるので、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{16}{35}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{16}{35}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \frac{3}{7}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{4}{35}\overrightarrow{OA} + \frac{16}{35}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥
$\frac{48}{125}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3+\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{2}$

〔解説〕

$f(x)=x(x-1)(x-2)$ であるから,

$$f\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{8}{5}\right)=\frac{48}{125}$$

である。また、 $0<x<1$ において,

$$g(x)=\log_{27} f(x)=\frac{\log_3 f(x)}{\log_3 27}$$

であるから,

$$g\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{\log_3 \frac{48}{125}}{\log_3 27}=\frac{1}{3}\left(\log_3 3+\log_3 2^4-\log_3 5^3\right)=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\log_3 2-\log_3 5$$

である。ここで、関数 $f(x)$ を x で微分すると,

$$f'(x)=(x-1)(x-2)+x(x-2)+x(x-1)=3x^2-6x+2$$

となるので,

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$$

が成り立つ。したがって、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$	...	$\frac{3+\sqrt{3}}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

増減表より、 $f(x)$ は $x=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ のとき極大値をとり、 $x=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ のとき極小値をとることが

分かる。ここで、 $0<\sqrt{3}<3$ であるから,

$$0<\frac{3-\sqrt{3}}{3}<1<\frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

が成り立つ。 $y=\log_{27} x$ は $x>0$ で単調増加するので、 $g(x)$ が最大となるのは $0<x<1$ におい

て $f(x)$ が最大となる $x=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ のときである。ここで,

$$f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{3-\sqrt{3}}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\left(\frac{-3-\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

であるから,

$$M=g\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)=\log_{27} \frac{2\sqrt{3}}{9}=\frac{1}{3}\log_3 \frac{2\sqrt{3}}{9}=\frac{1}{3}\log_3 2-\frac{1}{2}$$

と求めることができる。 $M>g\left(\frac{2}{5}\right)$ より

$$\frac{1}{3}\log_3 2-\frac{1}{2}>\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\log_3 2-\log_3 5$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{5}{2}>\frac{5}{6}$$

$$\therefore \frac{5}{2}>3^{\frac{5}{6}} \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また,

$$\begin{aligned} \frac{5}{2}-\sqrt{6} &= \frac{1}{\frac{5}{2}+\sqrt{6}}\left(\frac{5}{2}+\sqrt{6}\right)\left(\frac{5}{2}-\sqrt{6}\right) \\ &= \frac{1}{\frac{5}{2}+\sqrt{6}}\left(\frac{25}{4}-6\right) \\ &= \frac{1}{\frac{5}{2}+\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{4} \\ &>0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{5}{2}>\sqrt{6} \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。①、②より $\sqrt{6}, 3^{\frac{5}{6}}, \frac{5}{2}$ のうち最も大きな数は $\frac{5}{2}$ であることが分かる。