

〔Ⅰ〕

(1)

$$\frac{dx}{dt} = \cos t, \frac{dy}{dt} = -3 \sin 3t$$

である。 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ より $\cos t \neq 0$ であるから、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{3 \sin 3t}{\cos t}$$

を得る。

(答) $\frac{dy}{dx} = -\frac{3 \sin 3t}{\cos t}$

(2)

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \sin 3t = 0$$

である。ここで、

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2}\pi < 3t < \frac{3}{2}\pi$$

より、

$$3t = -\pi, 0, \pi \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$$

と求まる。

(答) $t = -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$

(3)

$t = \frac{\pi}{4}$ のとき、

$$x = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = 1 + \cos \frac{3}{4}\pi = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3 \sin \frac{3}{4}\pi}{\cos \frac{\pi}{4}} = -3$$

であるから、求める接線の方程式は、

$$y - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3 \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = -3x + \sqrt{2} + 1$$

である。

(答) $y = -3x + \sqrt{2} + 1$

(4)

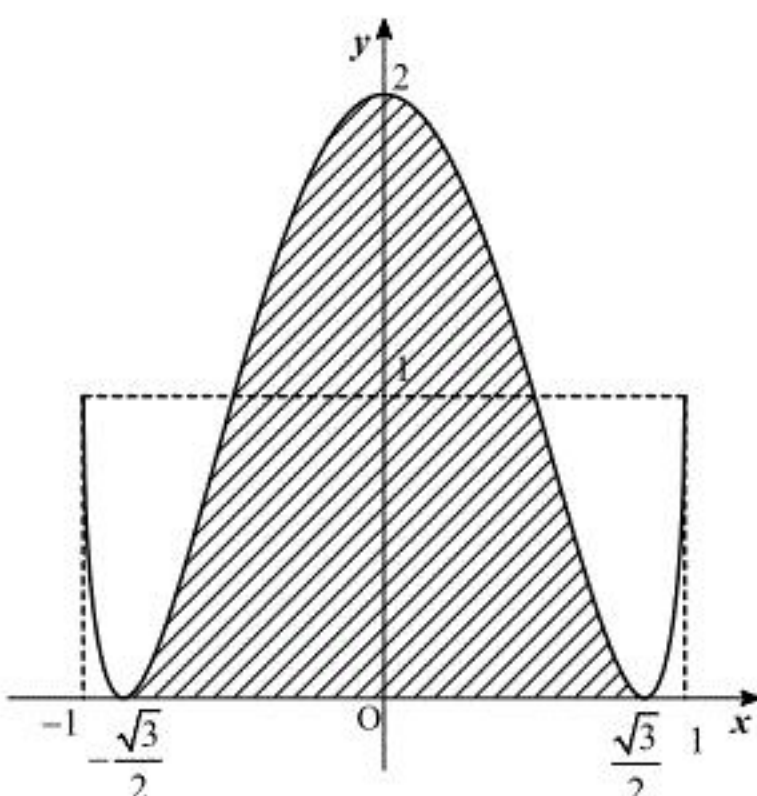
$$\frac{dx}{dt} = \cos t > 0$$

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$$

より、以下のように増減表が書ける。

t	$\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	...	$-\frac{\pi}{3}$	...	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$\frac{dx}{dt}$		+	+	+	+	+	+	+	
$\frac{dy}{dt}$		-	0	+	0	-	0	+	
x	-1	$\rightarrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\rightarrow$	0	$\rightarrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\rightarrow$	1
y	1	$\downarrow$	0	$\uparrow$	2	$\downarrow$	0	$\uparrow$	1
(x, y)	$(-1, 1)$	$\searrow$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$	$\nearrow$	$(0, 2)$	$\searrow$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$	$\nearrow$	$(1, 1)$

したがって、曲線 C の概形は次のようになる。



よって、曲線 C と x 軸で囲まれた図形は、上図の斜線部のようになる。これは y 軸に関して対称であるから、

$$S = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} y dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} y \frac{dx}{dt} dt$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 3t) \cos t dt$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos t + \cos 3t \cos t) dt$$

となる。ここで、

$$\cos 3t \cos t = \frac{1}{2} (\cos 4t + \cos 2t)$$

であるから、

$$S = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{ \cos t + \frac{1}{2} (\cos 4t + \cos 2t) \right\} dt$$

$$= 2 \left[\sin t + \frac{1}{8} \sin 4t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= 2 \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{8}$$

と求めることができる。

(答) $S = \frac{9\sqrt{3}}{8}$

〔Ⅱ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
-2	-4	2	$2 \cdot (-1)^n$	-3	$2n+1$	$(2n+1)(-1)^n$

〔解説〕

(1)

(*)において $n=1$ のとき,

$$x^2+y^2=(x+y)^2+a_1xy$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=x^2+y^2+(2+a_1)xy$$
 となるから,

$$2+a_1=0 \Leftrightarrow a_1=-2$$
 である。

(2)

$$(x+y)^4=x^4+_4C_1x^3y+_4C_2x^2y^2+_4C_3xy^3+y^4$$

$$=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

より, (*)において $n=2$ のとき,

$$x^4+y^4=(x+y)^4+a_1xy(x+y)^2+a_2x^2y^2$$

$$\Leftrightarrow x^4+y^4=x^4+y^4+(a_1+4)x^3y+(2a_1+a_2+6)x^2y^2+(a_1+4)xy^3$$
 となるから,

$$\begin{cases} a_1+4=0 \\ 2a_1+a_2+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=-4 \\ a_2=2 \end{cases}$$
 である。

(3)

$x=-y=1$ のとき, (*)の左辺は,

$$x^{2n}+y^{2n}=1^{2n}+(-1)^{2n}=2 \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

である。また $x+y=0$ であるから,

$$(x+y)^{2(n-k)}=\begin{cases} 0 & (k=1, \dots, n-1) \\ 1 & (k=n) \end{cases}$$
 となる。したがって, (*)の右辺は,

$$a_n(xy)^n(x+y)^0=a_n \cdot (-1)^n \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}$$

となる。①, ②より,

$$2=a_n \cdot (-1)^n \Leftrightarrow a_n=2 \cdot (-1)^n$$
 と求めることができる。

(4)

(***)において $n=1$ のとき,

$$x^3+y^3=(x+y)^3+b_1xy(x+y)$$

$$\Leftrightarrow x^3+y^3=x^3+y^3+(b_1+3)x^2y+(b_1+3)xy^2$$
 となるから,

$$b_1+3=0 \Leftrightarrow b_1=-3$$
 である。

(5)

$$x^{2n+1}+y^{2n+1}=(x+y)(x^{2n}-x^{2n-1}y+x^{2n-2}y^2-\dots-xy^{2n-1}+y^{2n})$$

$$=(x+y)\sum_{k=0}^{2n}x^{2n-k}(-y)^k$$

となるから, $A=\sum_{k=0}^{2n}x^{2n-k}(-y)^k$ であり, $x=-y=1$ を代入すると,

$$\sum_{k=0}^{2n}1=2n+1$$

である。ここで,

$$x^{2n+1}+y^{2n+1}=(x+y)^{2n+1}+\sum_{k=1}^nb_k(xy)^k(x+y)^{2(n-k)+1}$$

$$\Leftrightarrow (x+y)A=(x+y)\left\{(x+y)^{2n}+\sum_{k=1}^nb_k(xy)^k(x+y)^{2(n-k)}\right\}$$

$$\Leftrightarrow A=(x+y)^{2n}+\sum_{k=1}^nb_k(xy)^k(x+y)^{2(n-k)} \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{3}$$

が成り立つので, ③に $x=-y=1$ を代入して,

$$2n+1=b_n \cdot (-1)^n \cdot 1 \Leftrightarrow b_n=(2n+1)(-1)^n$$
 と求めることができる。

〔Ⅲ〕

(1)

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \left(x \log x + \frac{x}{2} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{x^2}{2} \right)' \log x dx + \frac{x^2}{4} \\ &= \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx + \frac{x^2}{4} \\ &= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} + C \\ &= \frac{x^2}{2} \log x + C\end{aligned}$$

である。ただし、 C は積分定数である。

$$(\text{答}) \quad \int f(x)dx = \frac{x^2}{2} \log x + C \quad (C \text{は積分定数})$$

(2)

$$\begin{aligned}f(x) < 0 &\Leftrightarrow x \log x + \frac{x}{2} < 0 \\ &\Leftrightarrow x \left(\log x + \frac{1}{2} \right) < 0 \\ &\Leftrightarrow \log x + \frac{1}{2} < 0 \quad (\because x > 0) \\ &\Leftrightarrow x < e^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

であるから、求める x の範囲は $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$ である。

$$(\text{答}) \quad 0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$$

(3)

$$0 < x < 1 \text{ のとき,} \\ \log x < 0 < x$$

が成り立つ。また、 $h(x) = \log x - \left(-\frac{1}{x} \right)$ ($0 < x \leq 1$) とすると、 $0 < x < 1$ において、

$$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} < 0$$

であるから、 $h(x)$ は単調減少である。 $h(x)$ は連続であるから、 $0 < x < 1$ のとき、

$$h(x) > h(1) = 1 > 0$$

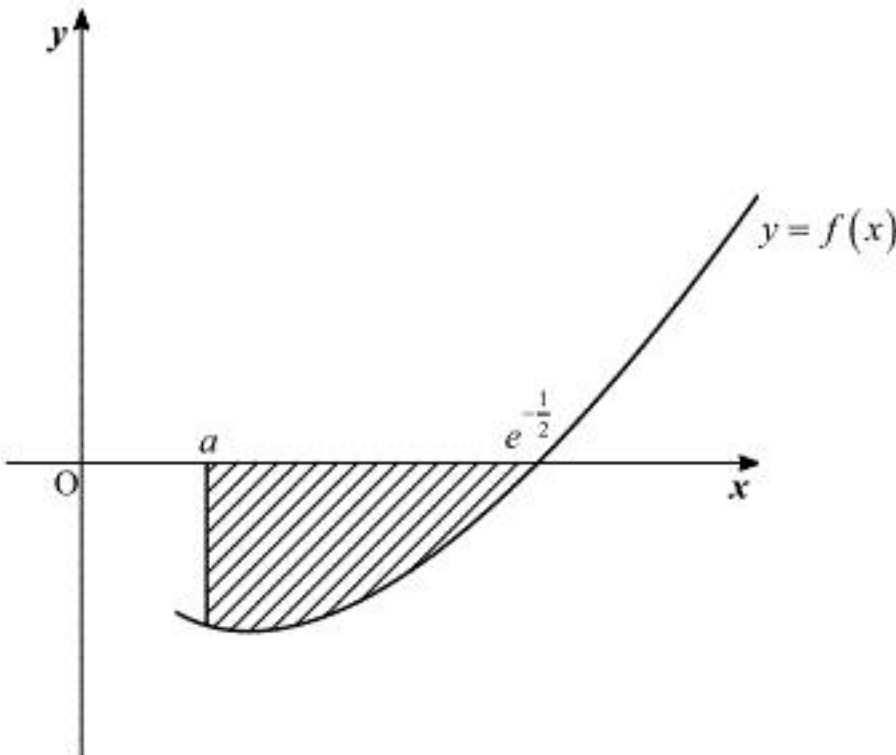
より、

$$h(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x} < \log x$$

が成り立つ。以上より、 $0 < x < 1$ において $-\frac{1}{x} < \log x < x$ が成り立つことが示された。

(証明終)

(4)



(2)の結果より、 $S(a)$ は上図の斜線部の面積であるから、

$$\begin{aligned}S(a) &= -\int_a^{e^{-\frac{1}{2}}} f(x)dx \\ &= -\left[\frac{x^2}{2} \log x \right]_a^{e^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{a^2}{2} \log a + \frac{1}{4e}\end{aligned}$$

である。ここで、 $0 < a < 1$ より(3)の結果を用いると、

$$\begin{aligned}-\frac{1}{a} &< \log a < a \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{a} \cdot a^2 &< a^2 \log a < a \cdot a^2 \quad (\because a^2 > 0) \\ \Leftrightarrow -a &< a^2 \log a < a^3\end{aligned}$$

が成り立つ。

$$\lim_{a \rightarrow +0} (-a) = \lim_{a \rightarrow +0} a^3 = 0$$

であるから、はさみうちの原理より、

$$\lim_{a \rightarrow +0} a^2 \log a = 0$$

となるので、

$$\lim_{a \rightarrow +0} S(a) = \frac{1}{4e}$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{a \rightarrow +0} S(a) = \frac{1}{4e}$$

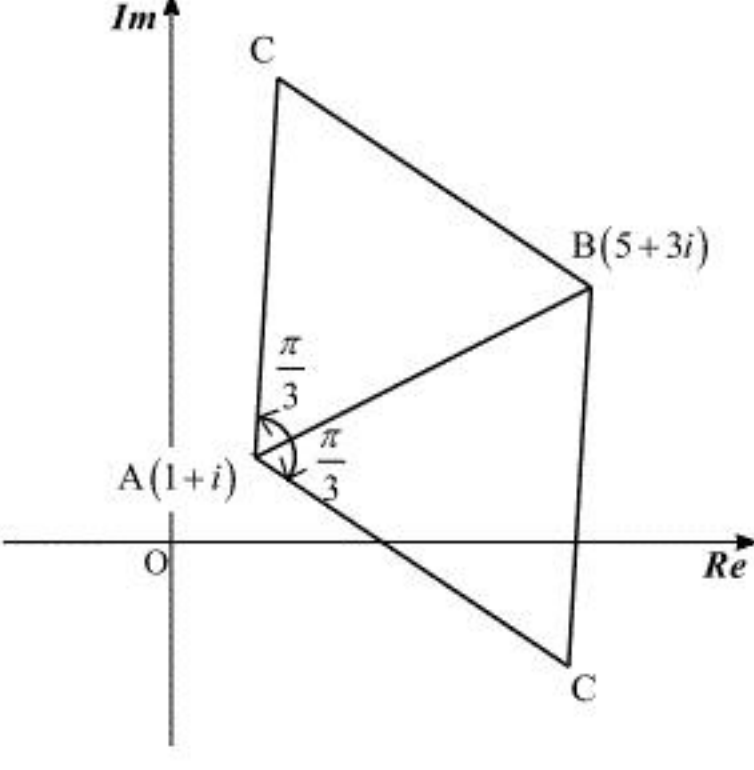
〔Ⅳ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥
$2+2\sqrt{3}$	4	$\sqrt{5}$	$\frac{1}{32} \leq x \leq 16$	X^2+Y^2-2	$2-\sqrt{3}$

〔解説〕

(1)



△ABCが正三角形となるのは、Cが上図のいずれかの位置にあるときである。このうちCの表す複素数の虚部が最大となるのは、Cが、BをAの周りに $\frac{\pi}{3}$ 回転させたものであるときだから、

$$\begin{aligned} & \{(5+3i)-(1+i)\}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)+(1+i) \\ &= (4+2i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1+i \\ &= 3-\sqrt{3}+i(2+2\sqrt{3}) \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

$$\begin{aligned} kx^2-kx+(k+1)xy-y^2-2y &= 0 \\ \Leftrightarrow k(x^2-x+xy)+xy-y^2-2y &= 0 \end{aligned}$$

であるから、この式がどのようなkに対しても成り立つとき、

$$\begin{aligned} x^2-x+xy &= 0 \Leftrightarrow x(x-1+y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ または } x=1-y \\ xy-y^2-2y &= 0 \Leftrightarrow y(x-y-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow y=0 \text{ または } y=x-2 \end{aligned}$$

である。x=0のとき、y=0またはy=0-2=-2より

$$(x,y)=(0,0), (0,-2)$$

である。x=1-yのとき、

$$y=0 \text{ または } y=1-y-2$$

$$\Leftrightarrow y=0 \text{ または } y=-\frac{1}{2}$$

より、

$$(x,y)=(1-y,y)=(1,0), \left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

である。以上より条件を満たすx,yの組は4組ある。

(3)

実数x,yが $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ を満たすとき、

$$x=\cos t, y=2\sin t \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

とおくことができる。このとき、

$$\begin{aligned} x^2-\frac{y^2}{4}-2xy &= \cos^2 t - \sin^2 t - 4\sin t \cos t \\ &= \cos 2t - 2\sin 2t \\ &= \sqrt{5}\left(\cos 2t \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - \sin 2t \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \\ &= \sqrt{5}\cos(2t+\alpha) \end{aligned}$$

と、 $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ を満たす実数 α を用いて表すことができる。

$$0 \leq t < 2\pi \Leftrightarrow \alpha \leq 2t+\alpha < 4\pi+\alpha$$

より、 $-1 \leq \cos(2t+\alpha) \leq 1$ であるから、最大値は $\sqrt{5}$ である。

(4)

真数条件より、

$$x>0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。 $\log_2 x=t$ とおくと、

$$(\text{与式}) \Leftrightarrow (t-1)(t+2)(t-3)(t+4) \leq 144$$

$$\Leftrightarrow (t^2+t-2)(t^2+t-12) \leq 144$$

$$\Leftrightarrow (t^2+t)^2-14(t^2+t)-120 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (t^2+t+6)(t^2+t-20) \leq 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる。ここで、

$$t^2+t+6=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4}>0$$

であるから、

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow t^2+t-20 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-4)(t+5) \leq 0$$

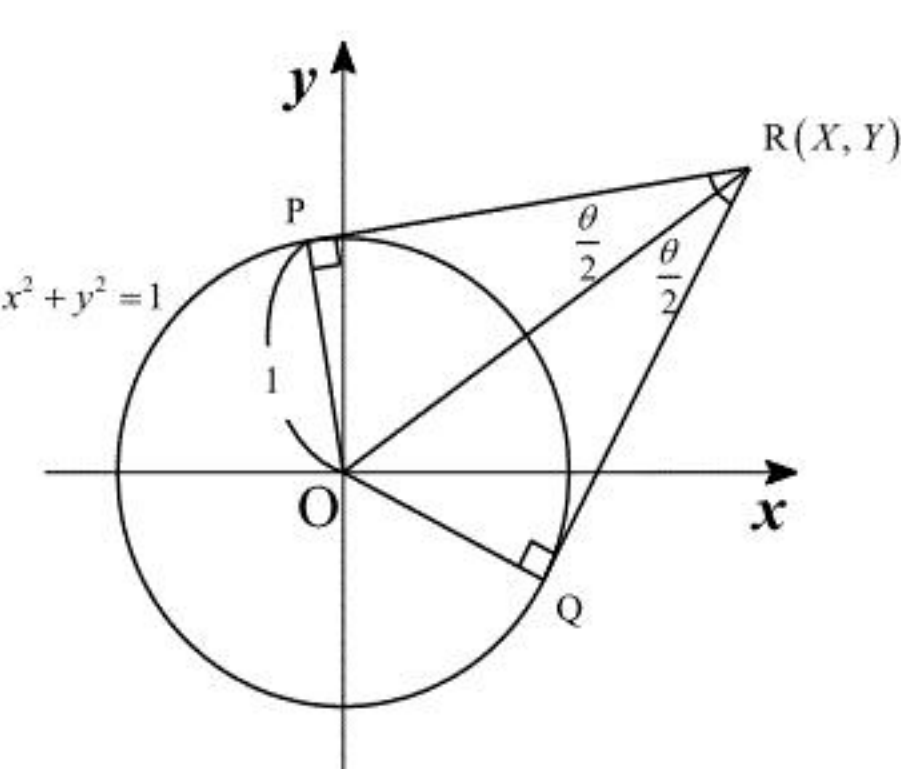
$$\Leftrightarrow -5 \leq t \leq 4$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq \log_2 x \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{32} \leq x \leq 16$$

と求めることができ、これは①を満たす。

(5)



$\angle ORP = \angle ORQ = \frac{\theta}{2}$ であり、 $OR = \sqrt{X^2+Y^2}$ であるから、

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{OP}{OR} = \frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}}$$

と表せる。したがって、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1-2\sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &= 1-\frac{2}{X^2+Y^2} \\ &= \frac{X^2+Y^2-2}{X^2+Y^2} \end{aligned}$$

と求まる。また、 $\theta = \frac{5}{6}\pi$ のとき、

$$\begin{aligned} \cos \frac{5}{6}\pi &= \frac{X^2+Y^2-2}{X^2+Y^2} \\ \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}(X^2+Y^2) &= X^2+Y^2-2 \\ \Leftrightarrow \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(X^2+Y^2) &= 2 \\ \Leftrightarrow X^2+Y^2 &= \frac{4}{2+\sqrt{3}} = 4(2-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

となり、点Rは原点を中心とする半径 $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$ の円周上を動くことがわかる。