

〔Ⅰ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥
1	1	-3	33	5	6

〔解説〕

(1)

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$$

であるので、増減表は以下のようになる。

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	33	↘	1	↗

したがって、 $x=1$ のとき極小値1をとり、 $x=-3$ のとき極大値33をとる。

(2)

$x=t$ における $y=f(x)$ の接線は

$$\begin{aligned} y &= (3t^2 + 6t - 9)(x - t) + t^3 + 3t^2 - 9t + 6 \\ &= (3t^2 + 6t - 9)x - 2t^3 - 3t^2 + 6 \end{aligned}$$

と表せる。これが点 $(0, p)$ を通るので、

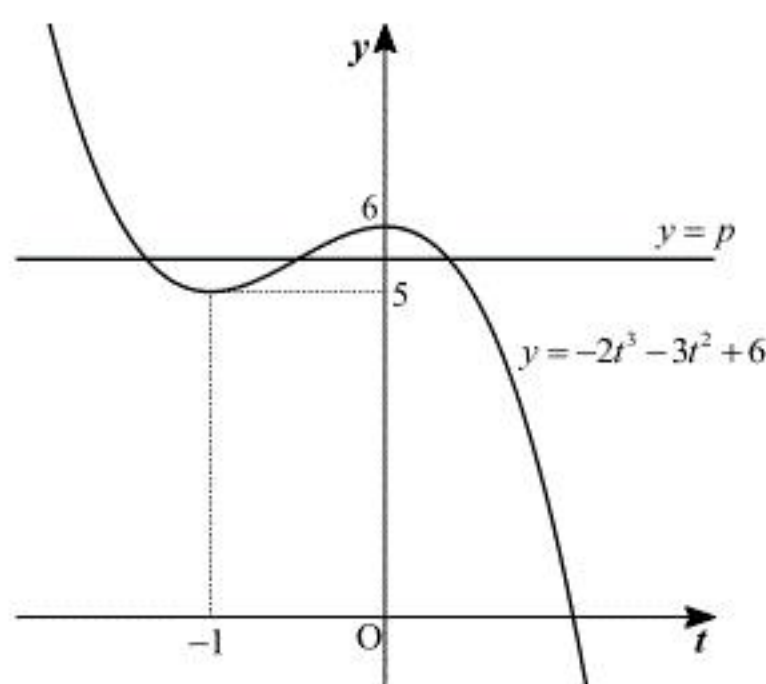
$$-2t^3 - 3t^2 + 6 = p$$

を満たす。 $y=f(x)$ に3本の接線を引けるとき、 $y=-2t^3-3t^2+6$ と $y=p$ の交点が3つ存在すればよい。 $y=-2t^3-3t^2+6$ を t で微分すると

$$y' = -6t^2 - 6t = -6t(t+1)$$

であるので、増減表とグラフは以下のようになる。

t	...	-1	...	0	...
y'	-	0	+	0	-
y	↘	5	↗	6	↘



したがって、 $y=f(x)$ に3本の接線を引けるとき、 p のとりうる値の範囲は $5 < p < 6$ である。また、 $y=f(x)$ にちょうど2本の接線を引けるのは、 $p=5, 6$ のときである。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥
$\frac{1}{\cos^2 \theta}$	$\frac{3\sqrt{10}}{10}$	$\frac{\sqrt{10}}{10}$	8	24	$\frac{18}{5}$

〔解説〕

$\cos \theta \neq 0$ のとき、

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

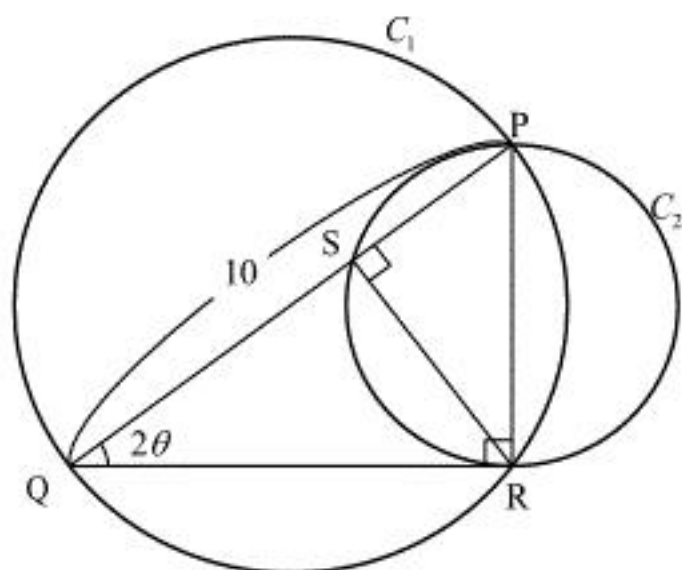
である。したがって、 $\tan \theta = \frac{1}{3}$ かつ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるとき、 $\cos \theta > 0, \sin \theta > 0$ より

$$1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

である。



円 C_1, C_2 と 4 点 P, Q, R, S の位置関係は上図のようになっている。 $\angle PRQ = \frac{\pi}{2}$ より、線分 PQ は円 C_1 の直径であるから、

$$PQ = 10$$

である。よって、辺 QR の長さは

$$PQ \cos 2\theta = 10(2\cos^2 \theta - 1) = 8$$

であり、辺 PR の長さは

$$\sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

であるから、 $\triangle PQR$ の面積は

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$$

である。また、 $\triangle PQR$ と $\triangle PRS$ について、 $\angle P$ が共通、 $\angle PRQ = \angle PSR = \frac{\pi}{2}$ より、

$$\triangle PQR \sim \triangle PRS$$

となり、

$$\therefore PS = PR \times \frac{PR}{PQ} = \frac{18}{5}$$

を得る。

〔Ⅲ〕

(1)

$$17 \times 4 = 68, 23 \times 3 = 69 \text{ より}$$

$$17 \times (-4) + 23 \times 3 = 1$$

である。

$$(\text{答}) (x, y) = (-4, 3)$$

(2)

(1)より、両辺を800倍して、

$$17 \times (-3200) + 23 \times 2400 = 800$$

である。よって、

$$17 \times (-3200 + 23 \times 140) + 23 \times (2400 - 17 \times 140) = 800$$

$$\Leftrightarrow 17 \times 20 + 23 \times 20 = 800$$

・・・①

が成り立つ。したがって、 $17x + 23y = 800$ のとき、①と辺々引いて、

$$17(x - 20) + 23(y - 20) = 0$$

を得る。17と23は互いに素であるから、方程式 $17x + 23y = 800$ の一般解は、整数 k を用いて、

$$\begin{cases} x - 20 = 23k \\ y - 20 = -17k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 23k + 20 \\ y = -17k + 20 \end{cases}$$

となる。 x と y がともに正であるとき、

$$23k + 20 > 0 \text{ かつ } -17k + 20 > 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{20}{23} < k < \frac{20}{17}$$

$$\therefore k = 0, 1$$

となるから、条件を満たす解は、

$$\begin{aligned} (x, y) &= (23 \times 0 + 20, -17 \times 0 + 20) \\ &= (20, 20) \end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned} (x, y) &= (23 \times 1 + 20, -17 \times 1 + 20) \\ &= (43, 3) \end{aligned}$$

の2組である。

$$(\text{答}) (x, y) = (20, 20), (43, 3)$$