

〔I〕

(1)

C_1 について $y' = 2x - 4$ より, $x = p$ における C_1 の接線の方程式は,

$$y = (2p - 4)(x - p) + p^2 - 4p + 4 = (2p - 4)x - p^2 + 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

である. 同様に, C_2 について $y' = 2x$ より, $x = q$ における C_2 の接線の方程式は,

$$y = 2q(x - q) + q^2 + a = 2qx - q^2 + a \quad \dots \textcircled{2}$$

である. C_1 と C_2 が共通接線 l を持つとき, ①, ②はともに直線 l の方程式であるから,

$$\begin{cases} 2p - 4 = 2q \\ -p^2 + 4 = -q^2 + a \end{cases}$$

が成り立つ. これらより,

$$-(p - 2)^2 + a = -p^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow p = -\frac{a}{4} + 2$$

$$\therefore (p, q) = \left(-\frac{a}{4} + 2, -\frac{a}{4}\right)$$

を得る.

$$(\text{答}) \quad (p, q) = \left(-\frac{a}{4} + 2, -\frac{a}{4}\right)$$

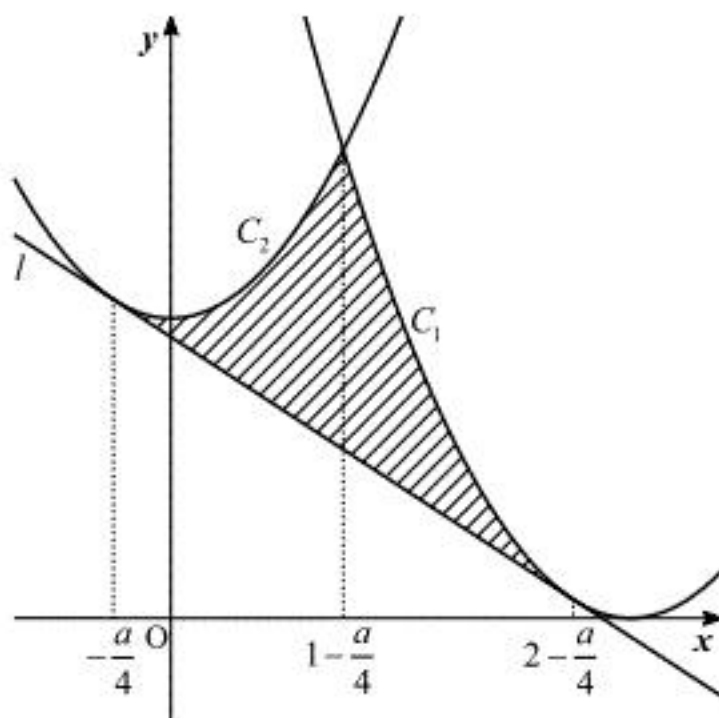
(2)

C_1 と C_2 の交点の x 座標は

$$x^2 - 4x + 4 = x^2 + a$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{a}{4} + 1$$

となる. 従って, 求める面積は以下の図の斜線部の領域の面積である.



(1)より, 直線 l の方程式を a で表すと,

$$y = 2qx - q^2 + a$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{a}{2}x - \frac{a^2}{16} + a$$

となる. よって, C_1, C_2, l で囲まれる部分の面積は, 直線 l が C_1, C_2 にそれぞれ $x = p, q$ で接することに注意すると,

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{a}{4}}^{-\frac{a}{4}+1} \left\{ (x^2 + a) - \left(-\frac{a}{2}x - \frac{a^2}{16} + a \right) \right\} dx + \int_{-\frac{a}{4}+1}^{-\frac{a}{4}+2} \left\{ (x^2 - 4x + 4) - \left(-\frac{a}{2}x - \frac{a^2}{16} + a \right) \right\} dx \\ &= \int_{-\frac{a}{4}}^{-\frac{a}{4}+1} \left\{ x - \left(-\frac{a}{4} \right) \right\}^2 dx + \int_{-\frac{a}{4}+1}^{-\frac{a}{4}+2} \left\{ x - \left(-\frac{a}{4} + 2 \right) \right\}^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} \left(x + \frac{a}{4} \right)^3 \right]_{-\frac{a}{4}}^{-\frac{a}{4}+1} + \left[\frac{1}{3} \left(x + \frac{a}{4} - 2 \right)^3 \right]_{-\frac{a}{4}+1}^{-\frac{a}{4}+2} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となり, a の値によらず一定値 $\frac{2}{3}$ を取る. よって題意は示された.

(証明終)

〔Ⅱ〕

(1)

$x = \frac{A+B}{2}, y = \frac{A-B}{2}$ とおくと, $A = x+y, B = x-y$ であるから, これを与式の左辺に代入すると,

$$\begin{aligned}\cos A + \cos B &= \cos(x+y) + \cos(x-y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ &= 2 \cos x \cos y \\ &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}\end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

与式を $f(x)$ とおく。条件より $-1 \leq \cos x \leq 1, -1 \leq \cos y \leq 1$ であるから, 平方完成により,

$$\begin{aligned}f(x) &= \left(\cos x - \frac{1}{2} \cos y \right)^2 - \frac{1}{4} \cos^2 y \\ &\geq -\frac{1}{4} \cos^2 y \\ &\geq -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

を得る。従って, $f(x)$ は等号が成立するとき, すなわち,

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{1}{2} \cos y \text{ かつ } \cos y = \pm 1 \\ \therefore (x, y) &= \left(\frac{\pi}{3}, 0 \right), \left(\frac{5\pi}{3}, 0 \right), \left(\frac{2\pi}{3}, \pi \right), \left(\frac{4\pi}{3}, \pi \right)\end{aligned}$$

のときに最小となり, その最小値は $-\frac{1}{4}$ である。

$$\text{(答) } (x, y) = \left(\frac{\pi}{3}, 0 \right), \left(\frac{5\pi}{3}, 0 \right), \left(\frac{2\pi}{3}, \pi \right), \left(\frac{4\pi}{3}, \pi \right) \text{ のとき最小値: } -\frac{1}{4}$$

(3)

条件より,

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= \cos \alpha \\ \vec{a} \cdot \vec{c} &= \cos \beta\end{aligned}$$

である。また,

$$\angle ROQ = 2\pi - (\alpha + \beta) \text{ または } \alpha + \beta \text{ または } \alpha - \beta \text{ または } \beta - \alpha$$

であるから,

$$\begin{aligned}\vec{b} \cdot \vec{c} &= \cos \angle ROQ \\ &= \cos(\alpha \pm \beta)\end{aligned}$$

となる。(1)より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) \\ &= \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{a}|^2 \\ &= \cos(\alpha \pm \beta) - (\cos \alpha + \cos \beta) + 1 \\ &= 2 \left(\cos^2 \frac{\alpha \pm \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right)\end{aligned}$$

と変形できる。したがって, (2)より,

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} \geq -\frac{1}{2}$$

である。また, $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$ かつ Q, R が一致しないとき,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} &= 2 \left(\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ &= 2 \left(\cos^2 \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos 0 \right) \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

が確かに成り立つ。したがって, $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$ の最小値は, $-\frac{1}{2}$ である。

$$\text{(答) } \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \cos(\alpha \pm \beta) - (\cos \alpha + \cos \beta) + 1, \text{ 最小値: } -\frac{1}{2}$$

〔Ⅲ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤
5	5	$\frac{b_n}{b_n+3}$	$\frac{2}{3^n-1}$	$\frac{5 \cdot 3^n - 3}{3^n - 1}$

〔解説〕

(1)

ある自然数 m ($m > 1$) に対して $a_m = 5$ となったとすると,

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{6a_{m-1} - 15}{a_{m-1} - 2} \\ \Leftrightarrow 5 &= \frac{6a_{m-1} - 15}{a_{m-1} - 2} \\ \therefore a_{m-1} &= 5 \end{aligned}$$

となる。これを繰り返すと,

$$a_m = a_{m-1} = \cdots = a_1 = 5$$

となり $a_1 = 6$ と矛盾する。したがってすべての自然数 n に対して $a_n \neq 5$ であることが背理法により示された。

(2)

$b_n = a_n - 5$ とおくと

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 5 = \frac{6a_n - 15}{a_n - 2} - 5 = \frac{a_n - 5}{a_n - 2} = \frac{b_n}{b_n + 3}$$

となる。(1)よりすべての自然数 n に対して $b_n \neq 0$ であるので, $c_n = \frac{1}{b_n}$ とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_{n+1}} &= \frac{b_n + 3}{b_n} \\ \Leftrightarrow c_{n+1} &= 1 + 3c_n \\ \Leftrightarrow c_{n+1} + \frac{1}{2} &= 3\left(c_n + \frac{1}{2}\right) \\ \therefore c_n &= \left(c_1 + \frac{1}{2}\right)3^{n-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3^n - 1) \end{aligned}$$

となる。したがって, $\{b_n\}$ の一般項は,

$$b_n = \frac{2}{3^n - 1}$$

となる。

(3)

(2)より,

$$a_n = b_n + 5 = \frac{5 \cdot 3^n - 3}{3^n - 1}$$

となる。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

(1)	①	$\frac{1}{1024}$		
(2)	②	$\frac{63}{256}$		
(3)	③	$\frac{319}{512}$		
(4)	④	$\frac{1+a+ab}{3+ab}$		
(5)	⑤	$\frac{1}{2}$	⑥	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

〔解説〕

(1)

コインを10回投げて、表が一度も出ない確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$$

である。

(2)

コインを10回投げて、表の出る回数がちょうど5回である確率は、

$${}_{10}C_5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{252}{1024} = \frac{63}{256}$$

である。

(3)

表の出る回数がちょうど n 回である確率を p_n とおくと、

$$p_1 = {}_{10}C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{10}{1024}$$

$$p_2 = {}_{10}C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{45}{1024}$$

$$p_3 = {}_{10}C_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{120}{1024}$$

$$p_4 = {}_{10}C_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{210}{1024}$$

であり、また(1), (2)より、

$$p_0 = \frac{1}{1024}$$

$$p_5 = \frac{252}{1024}$$

である。よって求める確率は、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^5 p_n &= \frac{1+10+45+120+210+252}{1024} \\ &= \frac{638}{1024} \\ &= \frac{319}{512} \end{aligned}$$

である。

(4)

$$\begin{aligned} \log_{56} 42 &= \frac{\log_2 42}{\log_2 56} \\ &= \frac{\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 7}{\log_2 2^3 + \log_2 7} \\ &= \frac{1+a+\log_2 7}{3+\log_2 7} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} \log_2 7 &= \frac{\log_3 7}{\log_3 2} \\ &= (\log_2 3) \cdot (\log_3 7) \\ &= ab \end{aligned}$$

であるから、①より

$$\log_{56} 42 = \frac{1+a+ab}{3+ab}$$

を得る。

(5)

$$X = \log_2 x$$

とおくと、

$$\begin{aligned} (\log_2 x)(\log_8 x) + \log_4 x + \frac{1}{6} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\log_2 x) \frac{\log_2 x}{\log_2 8} + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \frac{1}{6} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{X^2}{3} + \frac{X}{2} + \frac{1}{6} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6}(X+1)(2X+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow X = -1, -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} X &= \log_2 x \\ \Leftrightarrow x &= 2^X \end{aligned}$$

であるから、求める解は

$$\begin{aligned} x &= 2^{-1}, 2^{-\frac{1}{2}} \\ \therefore x &= \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

である。