2017年度入学試験問題

数　　学

注　意　事　項

1．試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。

2．解答はすべて黒鉛筆（ＨＢ）〈シャープペンシルは，ＨＢ 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。

3．解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し，切取線から切り離してください。

4．試験時間は 100 分です。

5．問題は 4 ページで大問 4 問です。余白は計算用紙です。

6．解答用紙は両面になっています。

福岡大学入学試験問題

〔Ⅰ〕 曲線 C が媒介変数 t を用いて $x = \sin t,\ y = 1 + \cos 3t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$ と表されているとき，次の問いに答えよ。

(1) $\frac{dy}{dx}$ を t の式で表せ。

(2) $\frac{dy}{dx} = 0$ を満たす t の値をすべて求めよ。

(3) $t = \frac{\pi}{4}$ に対応する曲線 C 上の点における接線の方程式を求めよ。

(4) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

〔Ⅱ〕 自然数 n ごとに定まる整数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n で,

$$x^{2n}+y^{2n}=(x+y)^{2n}+\sum_{k=1}^{n}a_k(xy)^k(x+y)^{2(n-k)} \quad \cdots\cdots (*)$$

を満たすものが存在する。ただし, $(x+y)^0=1$ とする。同様に, n ごとに定まる整数 b_1, b_2, $\cdots$, b_n で,

$$x^{2n+1}+y^{2n+1}=(x+y)^{2n+1}+\sum_{k=1}^{n}b_k(xy)^k(x+y)^{2(n-k)+1} \quad \cdots\cdots (**)$$

を満たすものが存在する。次の $\boxed{}$ をうめよ。ただし, $\boxed{④}$, $\boxed{⑥}$, $\boxed{⑦}$ には n の式で, 他の $\boxed{}$ は数値でうめること。

(1) $n=1$ のとき, $x^2+y^2=(x+y)^2+a_1xy$ なので, $a_1=\boxed{①}$ である。

(2) $n=2$ のとき, $x^4+y^4=(x+y)^4+a_1xy(x+y)^2+a_2x^2y^2$ なので, $a_1=\boxed{②}$, $a_2=\boxed{③}$ である。

(3) $(*)$ の式に $x=-y=1$ を代入して $a_n=\boxed{④}$ を得る。

(4) $n=1$ のとき, $b_1=\boxed{⑤}$ である。

(5) $x^{2n+1}+y^{2n+1}=(x+y)A$ と因数分解できる。A に $x=-y=1$ を代入した値は $\boxed{⑥}$ である。よって $(**)$ において, $b_n=\boxed{⑦}$ である。

〔Ⅲ〕 関数 $f(x) = x\log x + \dfrac{x}{2}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ。

(2) $0 < x$ において，$f(x) < 0$ となる x の範囲を求めよ。

(3) $0 < x < 1$ において，$-\dfrac{1}{x} < \log x < x$ を示せ。

(4) $0 < a < e^{-\frac{1}{2}}$ とするとき，直線 $x = a$ と曲線 $y = f(x)$ $(x \geqq a)$ および x 軸とで囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする。このとき $\displaystyle\lim_{a \to +0} S(a)$ を求めよ。

〔Ⅳ〕 次の $\boxed{}$ をうめよ。

(1) 複素数平面において2点 A$(1+i)$, B$(5+3i)$ をとる。三角形ABCが正三角形となる点Cに対応する複素数で虚部が最大のものは

$3-\sqrt{3}+i(\boxed{①})$ である。

(2) 等式 $kx^2-kx+(k+1)xy-y^2-2y=0$ が k のどのような値に対しても成り立つような x, y の組は $\boxed{②}$ 組ある。

(3) 実数 x, y が $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ を満たしながら変化するとき, $x^2-\dfrac{y^2}{4}-2xy$ の最大値は $\boxed{③}$ である。

(4) 不等式

$$(\log_2 x-1)(\log_2 x+2)(\log_2 x-3)(\log_2 x+4)\leqq 144$$

を満たす x の範囲は $\boxed{④}$ である。

(5) xy 平面上の単位円 C の外側の点 R(X, Y) から C へ2本の接線を引き, C との接点をP, Qとする。∠PRQ を θ で表すとき, $\cos\theta$ は X, Y を用いて $\cos\theta=\dfrac{\boxed{⑤}}{X^2+Y^2}$ と表される。$\theta=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき, 点Rは原点を中心とする, 半径 $2\sqrt{\boxed{⑥}}$ の円周上を動く。

(以上)