

2017 年度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 90 分です。
5. 問題は 4 ページで大問 4 問です。余白は計算用紙です。
6. 解答用紙は両面になっています。

〔Ⅰ〕 2つの放物線 $C_1: y = x^2 - 4x + 4$, $C_2: y = x^2 + a$ がある。 C_1 と C_2 は共通接線 l を持ち、 C_1 と l の接点は $P(p, p^2 - 4p + 4)$, C_2 と l の接点は $Q(q, q^2 + a)$ であるとする。

次の問いに答えよ。

- (1) p, q それぞれを a を用いて表せ。
- (2) C_1 と C_2 と l で囲まれる部分の面積が a の値によらず一定になることを示せ。

〔Ⅱ〕 次の問いに答えよ。

- (1) 三角関数の加法定理を用いて、 $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ が成り立つことを示せ。
- (2) $0 \leq x < 2\pi$, $0 \leq y < 2\pi$ であるとき、 $\cos^2 x - \cos x \cos y$ の最小値を平方完成を考えることにより求めよ。また、そのときの x , y の値を求めよ。
- (3) 原点 O を中心とする単位円周上に 3 点 P , Q , R がある。 $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OR} = \vec{c}$, $\angle POQ = \alpha$, $\angle POR = \beta$ とするとき、内積 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$ を α , β を用いて表し、 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$ の最小値を求めよ。

〔Ⅲ〕 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 6, \quad a_{n+1} = \frac{6a_n - 15}{a_n - 2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により与えられている。次の をうめよ。

- (1) すべての自然数 n に対して、 $a_n \neq 5$ であることを、背理法で次のようにして示すことができる。

ある自然数 m ($m > 1$) に対して $a_m = 5$ となったとすると、上の関係式より a_{m-1} の値は ① となる。

これを繰り返すと、 $a_1 =$ ② となり矛盾する。

- (2) $b_n = a_n - 5$ とおくとき、 b_{n+1} を b_n を用いて表すと、 $b_{n+1} =$ ③ となり、これより、 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n =$ ④ となる。

- (3) したがって、 $a_n =$ ⑤ となる。

〔Ⅳ〕 次の をうめよ。

(1) コインを 10 回投げて、表が一度も出ない確率は ① である。

(2) コインを 10 回投げて、表の出る回数がちょうど 5 回である確率は ② である。

(3) コインを 10 回投げて、表の出る回数が 5 回以下である確率は ③ である。

(4) $\log_2 3 = a$, $\log_3 7 = b$ とおくとき, $\log_{56} 42$ を a , b を用いて表すと ④ となる。

(5) 方程式

$$(\log_2 x)(\log_8 x) + \log_4 x + \frac{1}{6} = 0$$

の解は, $x =$ ⑤ , ⑥ である。

(以上)