

【I】

(1)

C_1 と C_2 の方程式から y を消去して得られる x の 2 次方程式

$$\begin{aligned}
 -x^2 - \frac{1}{8} &= x^2 + (a-2)x \\
 \Leftrightarrow 2x^2 + (a-2)x + \frac{1}{8} &= 0 \qquad \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

の判別式を D とすると、 C_1, C_2 が共有点をもたないための条件は $D < 0$ である。

$$\begin{aligned}
 D &< 0 \\
 \Leftrightarrow (a-2)^2 - 1 &< 0 \\
 \Leftrightarrow -1 < a-2 < 1 \\
 \therefore 1 < a < 3
 \end{aligned}$$

より、求める a の値の範囲は $1 < a < 3$ である。

(答) $1 < a < 3$

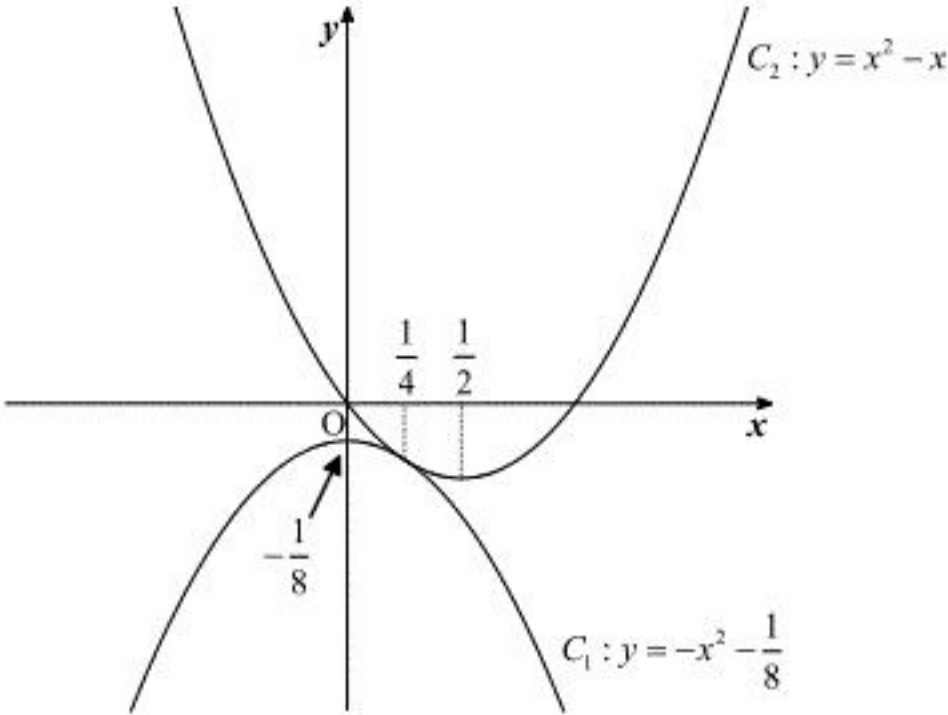
(2)

$$\begin{aligned}
 C_1 : y &= -x^2 - \frac{1}{8} \\
 C_2 : y &= x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

のとき、①は

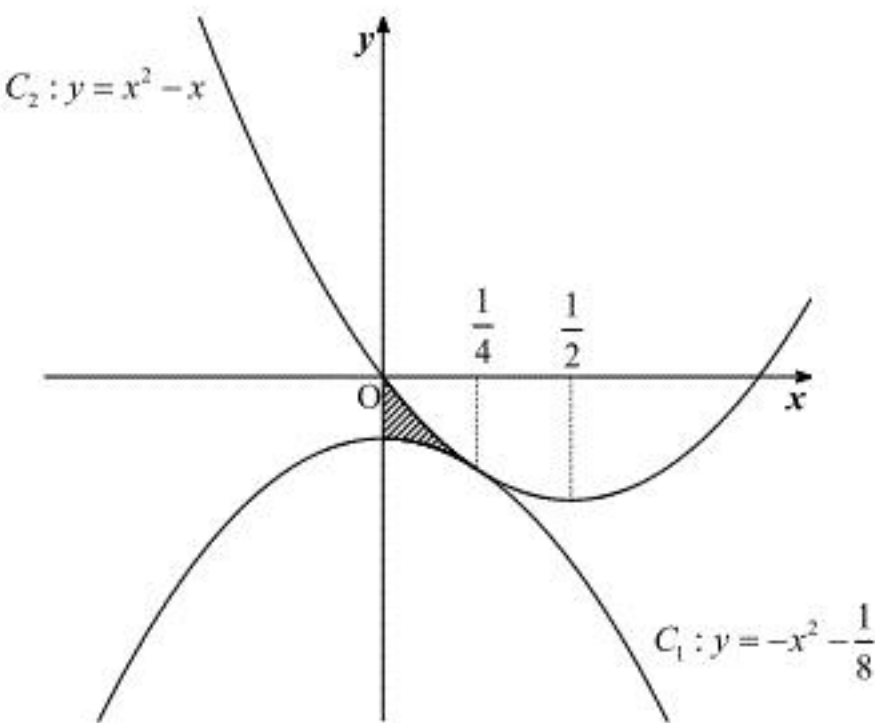
$$2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = 0$$

となるから、2 つの放物線は $x = \frac{1}{4}$ で接することがわかる。これにより、 C_1 と C_2 を図示すると以下のようになる。



(答) 前図

(3)



求めるのは上図の斜線部分の面積であるから、

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{1}{4}} \left\{ (x^2 - x) - \left(-x^2 - \frac{1}{8} \right) \right\} dx &= \int_0^{\frac{1}{4}} 2 \left(x - \frac{1}{4} \right)^2 dx \\
 &= \left[\frac{2}{3} \left(x - \frac{1}{4} \right)^3 \right]_0^{\frac{1}{4}} \\
 &= \frac{1}{96}
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{96}$

〔Ⅱ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
2	$2\sqrt{3}$	2	4	$\frac{11}{6}\pi$	12	0

〔解説〕

2倍角の公式より

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

である。よって、

$$\begin{aligned} y &= 8\sin^2\theta - 4\sqrt{3}\sin 2\theta + 4 \\ &= 8\sin^2\theta - 8\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 4(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ &= 12\sin^2\theta - 8\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 4\cos^2\theta \\ &= (2\sqrt{3}\sin\theta - 2\cos\theta)^2 \end{aligned}$$

と変形できる。三角関数の合成を行うと

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3}\sin\theta - 2\cos\theta &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} \left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2}} \sin\theta - \frac{2}{\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2}} \cos\theta \right) \\ &= 4\sin\left(\theta + \frac{11}{6}\pi\right) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\frac{5}{6}\pi \leq \theta \leq \frac{4}{3}\pi$ のとき

$$\frac{8}{3}\pi \leq \theta + \frac{11}{6}\pi \leq \frac{19}{6}\pi \Leftrightarrow 2\pi + \frac{2}{3}\pi \leq \theta + \frac{11}{6}\pi \leq 2\pi + \frac{7}{6}\pi$$

であるから

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} &\leq \sin\left(\theta + \frac{11}{6}\pi\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow -2 &\leq 4\sin\left(\theta + \frac{11}{6}\pi\right) \leq 2\sqrt{3} \\ \therefore 0 &\leq \left\{4\sin\left(\theta + \frac{11}{6}\pi\right)\right\}^2 \leq 12 \end{aligned}$$

となるので、 y は最大値12、最小値0をとることがわかる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
4	5	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{17}{6}\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} - \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}(17 \cdot 5^{n-1} - 3^{n+1})$

〔解説〕

数列 $\{a_n\}$ は漸化式

$$a_1 = 16, a_{n+1} = 2^{3^{n+1}} \cdot (a_n)^5 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たす。 $b_n = \log_2 a_n$ とおくと、

$$b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 16 = 4$$

である。また、 a_n の漸化式について、両辺 2 を底とする対数をとると、

$$\begin{aligned} \log_2 a_{n+1} &= 3^{n+1} + 5 \log_2 a_n \\ \therefore b_{n+1} &= 5b_n + 3^{n+1} \end{aligned}$$

となる。数列 $\{c_n\}$ を、 $c_n = \frac{b_n}{3^n}$ と定めると、

$$c_1 = \frac{b_1}{3} = \frac{4}{3}$$

である。また、 b_n の漸化式の両辺を 3^{n+1} でわると、

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{3^{n+1}} &= \frac{5}{3} \cdot \frac{b_n}{3^n} + 1 \\ \therefore c_{n+1} &= \frac{5}{3} c_n + 1 \end{aligned}$$

となる。この式を変形すると、

$$c_{n+1} + \frac{3}{2} = \frac{5}{3} \left(c_n + \frac{3}{2} \right)$$

となるから、数列 $\left\{ c_n + \frac{3}{2} \right\}$ は初項 $c_1 + \frac{3}{2} = \frac{17}{6}$ 、公比 $\frac{5}{3}$ の等比数列である。よって、

$$\begin{aligned} c_n + \frac{3}{2} &= \frac{17}{6} \left(\frac{5}{3} \right)^{n-1} \\ \therefore c_n &= \frac{17}{6} \left(\frac{5}{3} \right)^{n-1} - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となるので、

$$b_n = 3^n c_n = \frac{1}{2} (17 \cdot 5^{n-1} - 3^{n+1})$$

となることがわかる。したがって

$$a_n = 2^{b_n} = 2^{\frac{1}{2}(17 \cdot 5^{n-1} - 3^{n+1})}$$

である。