

〔Ⅰ〕

(1)

$f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x} - x^{\frac{1}{2}}e^{-x} \\ &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(1-2x)e^{-x} \end{aligned}$$

である。よって、増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}}$	

したがって $x = \frac{1}{2}$ のとき極大値 $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}}$ をとり、極小値はない。

(答) 極大値： $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}}$ ，極小値：なし

(2)

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left\{ \frac{1}{2} \left(x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right) e^{-x} \right\}' \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \right) e^{-x} - \frac{1}{2} \left(x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right) e^{-x} \\ &= x^{-\frac{3}{2}} \left(x^2 - x - \frac{1}{4} \right) e^{-x} \\ &= x^{-\frac{3}{2}} \left(x - \frac{1+\sqrt{2}}{2} \right) \left(x - \frac{1-\sqrt{2}}{2} \right) e^{-x} \end{aligned}$$

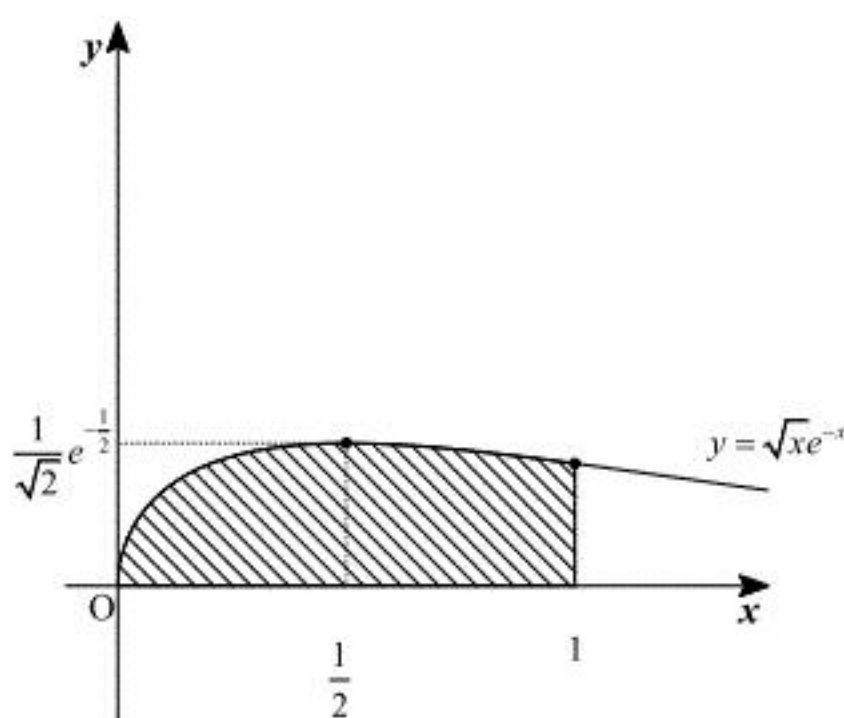
である。 $x \geq 0$ より、 $f''(x) = 0$ となる x は $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ である。上式より、 $x = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ の前後で

$f''(x)$ の符号は変化するから、変曲点の x 座標は $x = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ である。

(答) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

(3)

$f(0) = 0$ であるから、 $y = f(x)$ を図示すると以下の図になる。



斜線部分を x 軸回りに1回転させてできる立体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}e^{-x} \right)^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 x e^{-2x} dx \\ &= \pi \left(\left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2} e^{-2x} dx \right) \\ &= \pi \left(-\frac{1}{2} e^{-2} + \left[-\frac{1}{4} e^{-2x} \right]_0^1 \right) \\ &= \pi \left(-\frac{3}{4} e^{-2} + \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

である。

(答) $\pi \left(-\frac{3}{4} e^{-2} + \frac{1}{4} \right)$

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	①	②	
	6	2	
(2)	③	④	
	24	15	
(3)	⑤	⑥	⑦
	120	20	16

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}\cos \frac{5}{12} \pi &= \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

である。

(2)

(1)と同様に、

$$\begin{aligned}\sin \frac{5}{12} \pi &= \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt{6} - \sqrt{2} + (\sqrt{6} + \sqrt{2})i \\ &= 4 \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}i \right) \\ &= 4 \left(\cos \frac{5}{12} \pi + i \sin \frac{5}{12} \pi \right)\end{aligned}$$

より、

$$\alpha^n = 4^n \left(\cos \frac{5n}{12} \pi + i \sin \frac{5n}{12} \pi \right)$$

となる。ここで、 α^n が正の実数となるのは、 $\sin \frac{5n}{12} \pi = 0$ かつ $\cos \frac{5n}{12} \pi > 0$ を満たす場合である。

まず、 $\sin \frac{5n}{12} \pi = 0$ は $n = 12, 24, 36, \dots$ の場合に成り立つ。 $n = 12$ の場合は、 $\cos \frac{5 \cdot 12}{12} \pi = -1$ とな

り、 $\cos \frac{5n}{12} \pi > 0$ を満たさず不適である。 $n = 24$ の場合は、 $\cos \frac{5 \cdot 24}{12} \pi = 1$ となるため適する。

よって、 α^n が正の実数であるような最小の自然数 n は 24 である。また、

$$\begin{aligned}\log_{10} \alpha^{24} &= \log_{10} 4^{24} \\ &= 48 \log_{10} 2 \\ &= 48 \cdot 0.3010 \\ &= 14.448\end{aligned}$$

より、

$$10^{14} \leq \alpha^{24} < 10^{15}$$

を満たすから、 α^{24} は 15 桁の整数である。

(3)

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^n \beta^m}{4^n} &= \left(\cos \frac{5}{12} \pi + i \sin \frac{5}{12} \pi \right)^n \cdot \left(\cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10} \right)^m \\ &= \left(\cos \frac{5n}{12} \pi + i \sin \frac{5n}{12} \pi \right) \cdot \left(\cos \frac{m}{10} \pi + i \sin \frac{m}{10} \pi \right) \\ &= \cos \left(\frac{5n}{12} + \frac{m}{10} \right) \pi + i \sin \left(\frac{5n}{12} + \frac{m}{10} \right) \pi \\ &= \cos \frac{25n+6m}{60} \pi + i \sin \frac{25n+6m}{60} \pi\end{aligned}$$

と変形できる。ここで、120 を合同式の法とすると、

$$25 \cdot 1 + 6 \cdot 16 = 121 \equiv 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。よって、 $0 \leq k \leq 119$ を満たす整数 k に対し、 $n = k, m = 16k$ と定めることで、

$$25n + 6m = (25 \cdot 1 + 6 \cdot 16) \cdot k \equiv 1 \cdot k = k$$

となるから、 $\frac{\alpha^n \beta^m}{4^n}$ の偏角として $\frac{0}{60} \pi, \frac{1}{60} \pi, \frac{2}{60} \pi, \dots, \frac{119}{60} \pi$ の 120 通りが考えられる。 $\frac{\alpha^n \beta^m}{4^n}$

の大きさは常に 1 であるから、 $\frac{\alpha^n \beta^m}{4^n}$ は全部で 120 個の複素数の値をとる。これら 120 個のう

ち、虚数であって偏角が最小のものを γ とおくと、 γ の偏角は $\frac{\pi}{60}$ である。ここで、

$$\frac{\alpha \beta^m}{4} = \cos \frac{25+6m}{60} \pi + i \sin \frac{25+6m}{60} \pi$$

であるから、この偏角が $\frac{\pi}{60}$ となるための必要十分条件は、120 を合同式の法として

$$25 + 6m \equiv 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

となることである。ここで、 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ より

$$25 \cdot (1-1) + 6 \cdot (m-16) \equiv 0 \Leftrightarrow 6(m-16) \equiv 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

となるから、 $\textcircled{3}$ が成り立つための必要十分条件は、 $m-16$ が 20 で割り切れること、すなわち m を 20 で割ったときの余りが 16 となることである。

〔Ⅲ〕

(1)

$x = (1 - \cos \theta) \cos \theta$ であるとき,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= \sin \theta \cos \theta + (1 - \cos \theta)(-\sin \theta) \\ &= 2 \sin \theta \cos \theta - \sin \theta \\ &= \sin 2\theta - \sin \theta\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{dx}{d\theta} = \sin 2\theta - \sin \theta$$

(2)

$y = (1 - \cos \theta) \sin \theta$ であるとき,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta} &= \sin^2 \theta + (1 - \cos \theta) \cos \theta \\ &= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \cos \theta \\ &= -\cos 2\theta + \cos \theta \\ &= -\cos \left(\frac{3}{2} \theta + \frac{1}{2} \theta \right) + \cos \left(\frac{3}{2} \theta - \frac{1}{2} \theta \right) \\ &= 2 \sin \frac{3}{2} \theta \sin \frac{1}{2} \theta\end{aligned}$$

となるから, $0 < \theta < 2\pi$ において,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{3}{2} \theta \sin \frac{1}{2} \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin \frac{3}{2} \theta = 0, \sin \frac{1}{2} \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow \theta = \frac{2}{3} \pi, \frac{4}{3} \pi \quad (\because 0 < \theta < 2\pi)\end{aligned}$$

となる。よって, 下図のような増減表がかける。

θ	0	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	$\frac{4}{3}\pi$	...	2π
$\frac{dy}{d\theta}$		+	0	-	0	+	
y			極大		極小		

したがって, y は $\theta = \frac{2}{3}\pi$ で極大値 $\left(1 - \cos \frac{2}{3}\pi\right) \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ をとり, $\theta = \frac{4}{3}\pi$ で極小値

$\left(1 - \cos \frac{4}{3}\pi\right) \sin \frac{4}{3}\pi = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$ をとることが分かる。

$$(\text{答}) \quad \text{極大値 } \frac{3\sqrt{3}}{4}, \text{ 極小値 } -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

(3)

点 $P((1 - \cos \theta) \cos \theta, (1 - \cos \theta) \sin \theta)$ とすると, 半直線 OP と x 軸の正の向きのなす角は θ であるため, θ が $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲で動くとき点 P は $\theta = 0, 2\pi$ 以外で同じ点を通らない。よって曲線 C 全体の長さ L は, (1), (2)の結果を利用して,

$$\begin{aligned}L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin 2\theta - \sin \theta)^2 + (-\cos 2\theta + \cos \theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 2\theta - 2 \sin 2\theta \sin \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 2\theta - 2 \cos 2\theta \cos \theta + \cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) + (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - 2(\cos 2\theta \cos \theta + \sin 2\theta \sin \theta)} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 1 - 2 \cos \theta} d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta\end{aligned}$$

となる。ここで,

$$1 - \cos \theta = 1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

であり, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ において $\sin \frac{\theta}{2} \geq 0$ であることから,

$$\begin{aligned}L &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 2 \left[-2 \cos \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= 2 \{ 2 - (-2) \} \\ &= 8\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad L = 8$$

〔Ⅳ〕

〔解答〕

(1)	①	
	$\frac{1}{2^n-1}$	
(2)	②	
	-3	
(3)	③	④
	$\frac{\sqrt{10}}{10}$	$\frac{3\sqrt{10}}{10}$
(4)	⑤	
	$\frac{5}{7}$	
(5)	⑥	⑦
	$21+8\sqrt{5}$	$21-8\sqrt{5}$

〔解説〕

(1)

漸化式 $a_1=1, \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}+1\ (n=1, 2, 3, \cdots)$ で定義された数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。数列 $\{b_n\}$

を $b_n=\frac{1}{a_n}$ と定めると、漸化式 $b_1=1, b_{n+1}=2b_n+1$ を満たす。これを变形すると

$$b_{n+1}+1=2b_n+2\Leftrightarrow b_{n+1}+1=2(b_n+1)$$

となるから、数列 $\{b_n+1\}$ は初項 b_1+1 、公比 2 の等比数列となり、数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n+1=2^{n-1}(b_1+1)\Leftrightarrow b_n+1=2^n\ (\because b_1=1)$$

$$\therefore b_n=2^n-1$$

と求まる。したがって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\frac{1}{2^n-1}$$

であることがわかる。

(2)

複素数 α, β, γ が x についての恒等式 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3+x+1$ を満たすとき、3 次方程式の解と係数の関係より、基本対称式について

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1 \\ \alpha\beta\gamma=-1 \end{cases}$$

が成立する。ここで、 $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ は

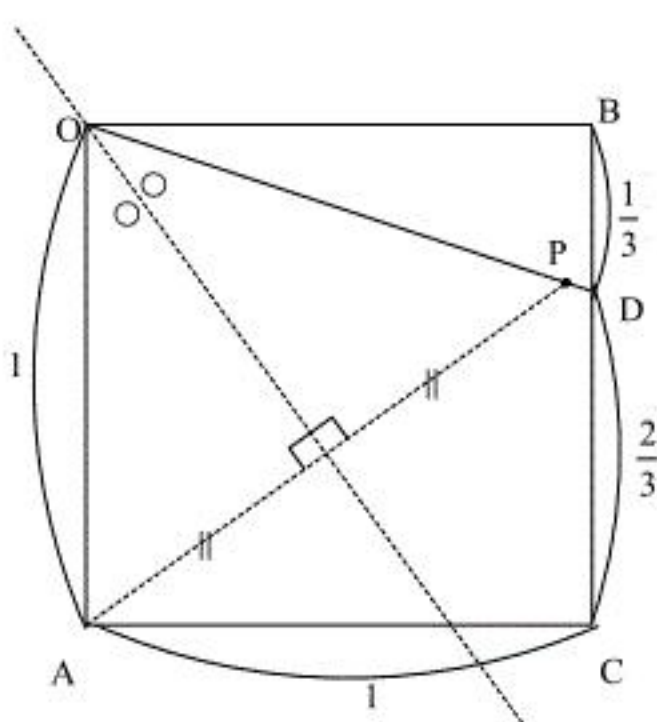
$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$$

と変形できるから、 $\alpha+\beta+\gamma=0, \alpha\beta\gamma=-1$ に注意して、求める値は

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3$$

であることがわかる。

(3)



点 P は $\angle AOD$ の二等分線に関して点 A と対称な点であるから、線分 OD 上に存在し、 $OP=1$ である。ここで、 $\triangle BOD$ に三平方の定理を用いることにより

$$OD=\sqrt{OB^2+BD^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{3}$$

となるから、 $\overline{OP}$ は $\overline{OA}, \overline{OB}$ を用いて

$$\overline{OP}=\frac{1}{\frac{\sqrt{10}}{3}}\overline{OD}=\frac{1}{\frac{\sqrt{10}}{3}}\left(\frac{1}{3}\overline{OA}+\overline{OB}\right)=\frac{\sqrt{10}}{10}\overline{OA}+\frac{3\sqrt{10}}{10}\overline{OB}$$

と表されることがわかる。

(4)

1 から 7 までの番号をつけた 7 枚のカードから 4 枚を取り出すとき、その取り出し方は全部で ${}_7C_4(=35)$ 通りあり、これらは同様に確からしく起こる。ここで、

A : 取り出した 4 枚のカードの番号の中で 2 番目に大きなもの

B : 取り出さなかった 3 枚のカード番号の中で最も大きなもの

とするとき、

取り出した 4 枚のカードの中に 6 と 7 が含まれる場合 : $A=6$ かつ $B\leq 5$

取り出した 4 枚のカードの中に 6 または 7 が含まれない場合 : $A\leq 5$ かつ $B\geq 6$

となる。 $B<A$ となる確率は、取り出した 4 枚のカードの中に 6 と 7 が含まれる確率と一致し

$$\frac{{}_3C_2}{{}_7C_4}=\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$$

となるから、その余事象である、 $B>A$ となる確率は

$$1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

と求まる。

(5)

実数 x, y が $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ を満たしながら変化するとき、 $(x-1)^2+4(y-1)^2$ の最大値と最小値を

求める。 $(x-1)^2+4(y-1)^2=k$ とおき、 k のとりうる値の範囲を W とおくと

$$k\in W\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \\ (x-1)^2+4(y-1)^2=k \end{cases}\text{を満たす実数 }x, y\text{が存在する}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+4y^2=16 \\ (x^2-2x+1)+4(y^2-2y+1)=k \end{cases}\text{を満たす実数 }x, y\text{が存在する}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+4y^2=16 \\ 2x+8y+k-21=0 \end{cases}\text{を満たす実数 }x, y\text{が存在する}$$

$$\Leftrightarrow\left(4y+\frac{k-21}{2}\right)^2+4y^2=16\text{を満たす実数 }y\text{が存在する}$$

$$\Leftrightarrow 80y^2+16(k-21)y+(k-21)^2-64=0\text{を満たす実数 }y\text{が存在する}$$

と同値変形できる。ここで、 y に関する 2 次方程式 $80y^2+16(k-21)y+(k-21)^2-64=0$ の判別式を D とおくと

$$\frac{D}{4}\geq 0\Leftrightarrow\{8(k-21)\}^2-80\{(k-21)^2-64\}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow(k-21)^2\leq 320$$

$$\Leftrightarrow 21-8\sqrt{5}\leq k\leq 21+8\sqrt{5}$$

となる。したがって、 $(x-1)^2+4(y-1)^2$ の最大値は $21+8\sqrt{5}$ であり、最小値は $21-8\sqrt{5}$ である

ことがわかる。