

〔Ⅰ〕

(1)

円 C の方程式は、

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2mx - 4my &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-m)^2 + (y-2m)^2 &= (\sqrt{5}m)^2 \end{aligned}$$

と変形できる。 $m > 0$ であるから、円 C の中心の座標は $(m, 2m)$ 、半径は $\sqrt{5}m$ となる。

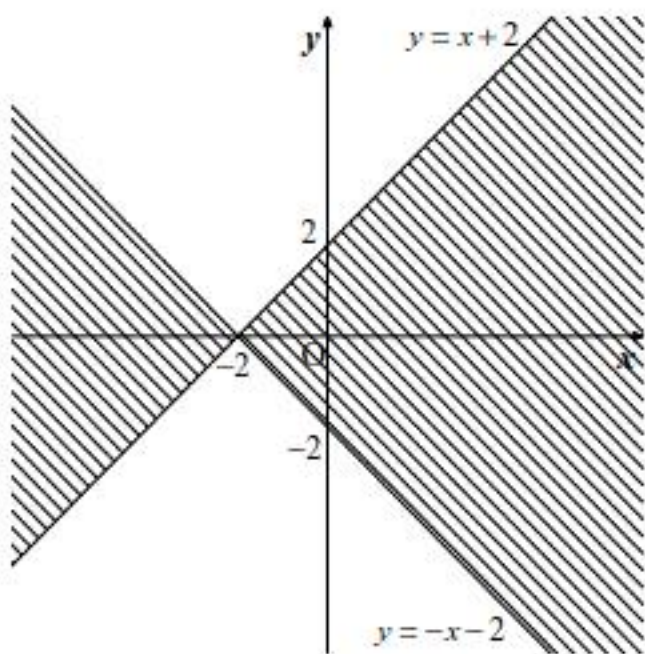
(答) 中心 $(m, 2m)$ 、半径 $\sqrt{5}m$

(2)

領域 D の不等式は、

$$\begin{aligned} (x+2)^2 - y^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x+2-y)(x+2+y) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \text{「} x+2-y \geq 0 \text{かつ} x+y+2 \geq 0 \text{」または「} x+2-y \leq 0 \text{かつ} x+y+2 \leq 0 \text{」} \end{aligned}$$

となるから、これを図示すると下図の斜線部のようになる。ただし境界線を含む。



(答) 前図

(3)

円 C とその内部が領域 D 内にある条件は、円 C の中心 $(m, 2m)$ が領域 D 内にあり、点 $(m, 2m)$ と 2 直線 $y = x + 2$, $y = -x - 2$ との距離がそれぞれ $\sqrt{5}m$ 以上であることである。点 $(m, 2m)$ が領域 D 内にあるのは、領域 D の不等式に $x = m$, $y = 2m$ を代入して、

$$\begin{aligned} (m+2)^2 - (2m)^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 3m^2 - 4m - 4 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (3m+2)(m-2) &\leq 0 \\ \therefore 0 < m \leq 2 \quad (\because m > 0) &\quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となるときである。また、点 $(m, 2m)$ と直線 $y = x + 2$ との距離が $\sqrt{5}m$ 以上であるのは、

$$\begin{aligned} \frac{|m-2m+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} &\geq \sqrt{5}m \\ \Leftrightarrow |2-m| &\geq \sqrt{10}m \end{aligned}$$

となるときである。①のもとでは、 $2-m \geq 0$ が成り立つからこの条件は

$$\begin{aligned} 2-m &\geq \sqrt{10}m \\ \Leftrightarrow m &\leq \frac{2}{\sqrt{10}+1} \\ \therefore 0 < m &\leq \frac{-2+2\sqrt{10}}{9} \quad (\because m > 0) \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。さらに、点 $(m, 2m)$ と直線 $y = -x - 2$ との距離が $\sqrt{5}m$ 以上であるのは、

$$\begin{aligned} \frac{|m+2m+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} &\geq \sqrt{5}m \\ \Leftrightarrow |3m+2| &\geq \sqrt{10}m \\ \Leftrightarrow 3m+2 &\geq \sqrt{10}m \quad (\because m > 0) \\ \Leftrightarrow m &\leq \frac{2}{\sqrt{10}-3} \\ \therefore 0 < m &\leq 6+2\sqrt{10} \quad (\because m > 0) \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となるときである。ここで $3 < \sqrt{10} < 4$ であるから、 $12 < 6+2\sqrt{10} < 14$, $\frac{4}{9} < \frac{-2+2\sqrt{10}}{9} < \frac{2}{3}$ である。よって、①、②、③の共通範囲をとると、

$$0 < m \leq \frac{-2+2\sqrt{10}}{9}$$

となる。したがって、円 C とその内部が領域 D 内にあるような m の最大値は、 $m = \frac{-2+2\sqrt{10}}{9}$

となる。

(答) $m = \frac{-2+2\sqrt{10}}{9}$

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	①	②	③
	-2	3	$x \leq 3$
(2)	④	(3)	⑤
	$\frac{1}{3}$		$\frac{\pi}{3}$

〔解説〕

(1)

与えられた方程式を解くと、

$$\begin{aligned}
 x^3 + x^2 - 8x - 12 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x-3)(x+2)^2 &= 0 \\
 \therefore x &= -2, 3
 \end{aligned}$$

となる。 $x = -2$ は2重解である。また、 $P(x) + |P(x)| = 0$ が成り立つのは、

$$P(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2)^2 \leq 0$$

となるときである。 $(x+2)^2 \geq 0$ であるから、この不等式が成り立つのは、 $x = -2$ または $x \leq 3$ となるときである。つまり、求める x の範囲は、 $x \leq 3$ である。

(2)

 $P(x)$ において $x = -2^{3t}$ を代入すると、

$$P(-2^{3t}) = (-2^{3t})^3 + (-2^{3t})^2 - 8 \cdot (-2^{3t}) - 12 = -2^{9t} + 2^{6t} + 2^{3t+3} - 12$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 2^{9t} - 2^{6t} - 2^{3t+3} + 12 &= 0 \\
 \Leftrightarrow P(-2^{3t}) &= 0 \\
 \Leftrightarrow -2^{3t} &= -2, 3
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $2^{3t} > 0$ であるから、

$$\begin{aligned}
 2^{3t} &= 2 \\
 \Leftrightarrow 3t &= 1 \\
 \Leftrightarrow t &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

となる。

(3)

 $P(x)$ において $x = \sqrt{3} \tan \theta$ を代入すると、

$$P(\sqrt{3} \tan \theta) = 3\sqrt{3} \tan^3 \theta + 3 \tan^2 \theta - 8\sqrt{3} \tan \theta - 12$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 3 \tan^3 \theta + \sqrt{3} \tan \theta - 8 \tan \theta - 4\sqrt{3} &= 0 \\
 \Leftrightarrow P(\sqrt{3} \tan \theta) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \sqrt{3} \tan \theta &= -2, 3 \\
 \Leftrightarrow \tan \theta &= -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\tan \theta > 0$ であるから、

$$\tan \theta = \sqrt{3}$$

となる。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\theta = \frac{\pi}{3}$ となる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥
$px+qy=1$	$\frac{1}{2pq}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{16}$

〔解説〕

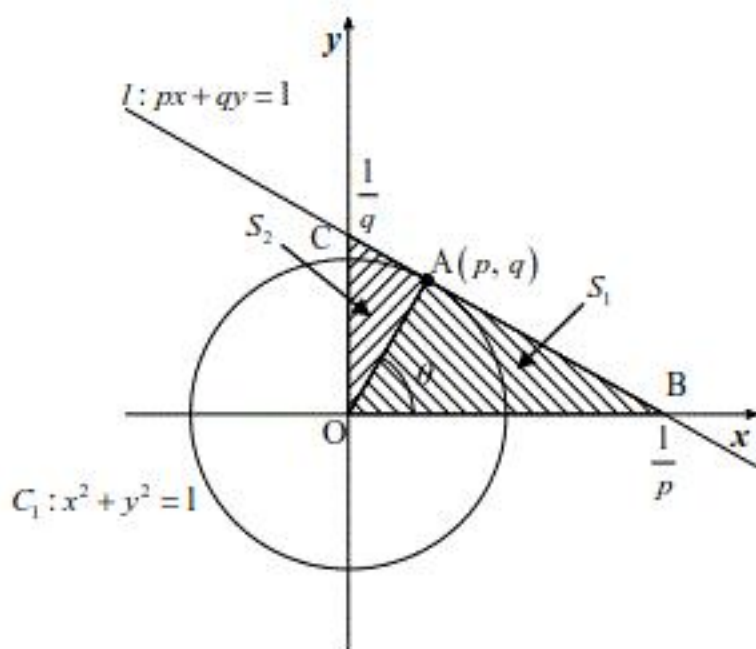
単位円を $C_1: x^2 + y^2 = 1$ とおくと、点 $A(p, q)$ における C_1 の接線 l の方程式は

$$px + qy = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。①に $x=0$ を代入して接線 l の y 切片を求めると、 $q>0$ より $y=\frac{1}{q}$ である。同様に①

に $y=0$ を代入して接線 l の x 切片を求めると、 $p>0$ より $x=\frac{1}{p}$ である。よって、点 B, C の座

標は $B\left(\frac{1}{p}, 0\right), C\left(0, \frac{1}{q}\right)$ となる。



上図から、 $\triangle OBC$ の面積は

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{2pq} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。また、点 A は円 C_1 上の点であり、 $p>0, q>0$ であるから、

$$p = \cos \theta, q = \sin \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

とおける。 $pq>0$ であるから、②より S が最小となるのは、 pq が最大となるときである。

$$pq = \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

であり、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より、 $0 < 2\theta < \pi$ だから、 pq は $2\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\frac{1}{2}$ をとる。よ

って、 S の最小値は

$$\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1$$

である。また、 $\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ の面積は上図よりそれぞれ

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p} \cdot q = \frac{q}{2p}, S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{q} \cdot p = \frac{p}{2q}$$

であるから、

$$S_1 \cdot S_2 = \frac{q}{2p} \cdot \frac{p}{2q} = \frac{1}{4} \quad \dots \textcircled{3}$$

である。③と $S_1 + S_2 = S$ であることより、

$$\begin{aligned} S_1^3 + S_2^3 &= 506 \\ \Leftrightarrow (S_1 + S_2)^3 - 3S_1S_2(S_1 + S_2) &= 506 \\ \Leftrightarrow S^3 &= 506 + \frac{3}{4}S \end{aligned}$$

が得られる。これを S について解くと

$$\begin{aligned} S^3 &= 506 + \frac{3}{4}S \\ \Leftrightarrow 4S^3 - 3S - 2024 &= 0 \\ \Leftrightarrow (S - 8)(4S^2 + 32S + 253) &= 0 \\ \Leftrightarrow S &= 8 \left(\because 4S^2 + 32S + 253 = 4(S + 4)^2 + 189 > 0 \right) \end{aligned}$$

となり、これは確かに整数である。これを②に代入すると

$$8 = \frac{1}{2pq} \Leftrightarrow pq = \frac{1}{16}$$

が得られる。