

【I】

(1)

絶対値をはずすために x の値で場合分けをする。

[1] $0 \leq x < 1$ のとき

$x-1 < 0, x-2 < 0, x-3 < 0$ であるから

$$\begin{aligned} y &= |x-1| + |x-2| + |x-3| \\ &= -(x-1) - (x-2) - (x-3) \\ &= -3x+6 \end{aligned}$$

となる。

[2] $1 \leq x < 2$ のとき

$x-1 \geq 0, x-2 < 0, x-3 < 0$ であるから

$$\begin{aligned} y &= |x-1| + |x-2| + |x-3| \\ &= (x-1) - (x-2) - (x-3) \\ &= -x+4 \end{aligned}$$

となる。

[3] $2 \leq x < 3$ のとき

$x-1 \geq 0, x-2 \geq 0, x-3 < 0$ であるから

$$\begin{aligned} y &= |x-1| + |x-2| + |x-3| \\ &= (x-1) + (x-2) - (x-3) \\ &= x \end{aligned}$$

となる。

[4] $3 \leq x \leq 4$ のとき

$x-1 \geq 0, x-2 \geq 0, x-3 \geq 0$ であるから

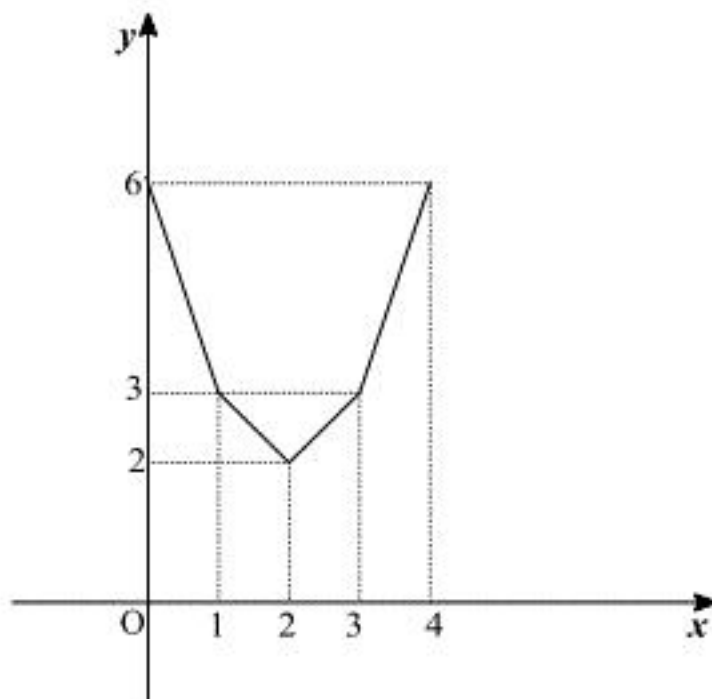
$$\begin{aligned} y &= |x-1| + |x-2| + |x-3| \\ &= (x-1) + (x-2) + (x-3) \\ &= 3x-6 \end{aligned}$$

となる。

以上[1]～[4]より

$$y = \begin{cases} -3x+6 & (0 \leq x < 1) \\ -x+4 & (1 \leq x < 2) \\ x & (2 \leq x < 3) \\ 3x-6 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

であり、これを図示して下図を得る。



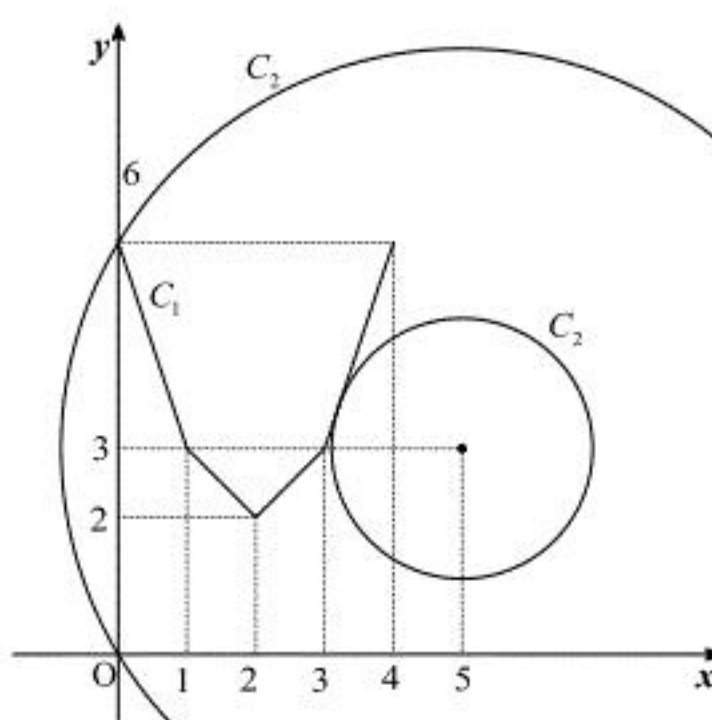
(答) 前図

(2)

円 C_2 は

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = r^2$$

と表され、 C_1 と C_2 を図示すると、下図のようになる。



C_2 が直線 $y=3x-6$ ($3 \leq x \leq 4$) と接するならば、このときの半径が、 C_1 と C_2 が共有点をもつような r の最小値となる。このとき

$$r = \frac{|3 \cdot 5 - 1 \cdot 3 - 6|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

であり、 C_2 と直線 $y=3x-6$ ($3 \leq x \leq 4$) との接点の x 座標は

$$\begin{aligned} (x-5)^2 + \{(3x-6)-3\}^2 &= \left(\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + 9x^2 - 54x + 81 &= \frac{18}{5} \\ \Leftrightarrow 50x^2 - 320x + 530 - 18 &= 0 \\ \Leftrightarrow 25x^2 - 160x + 256 &= 0 \\ \Leftrightarrow (5x-16)^2 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{16}{5} \end{aligned}$$

であるから、 $3 \leq x \leq 4$ の範囲で確かに接していることがわかる。また、 C_1 と C_2 が共有点をもつような r が最大となるのは、 C_2 が点 $(0, 6)$ を通るときであり

$$r = \sqrt{(5-0)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{34}$$

のときである。 C_1 は $0 \leq x \leq \frac{16}{5}$ で連続であるから、 $\frac{3\sqrt{10}}{5} \leq r \leq \sqrt{34}$ のとき、 C_1 と C_2 は共有点を持つ。

(答) $\frac{3\sqrt{10}}{5} \leq r \leq \sqrt{34}$

(3)

C_2 が点 $(4, 6)$ を通るとき

$$r = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

であるから、 C_1 と C_2 の共有点の数は

$$\frac{3\sqrt{10}}{5} < r \leq \sqrt{10} \text{ のとき, } 2 \text{ つ}$$

$$r = \frac{3\sqrt{10}}{5}, \sqrt{10} < r \leq \sqrt{34} \text{ のとき, } 1 \text{ つ}$$

である。また、 $\frac{3\sqrt{10}}{5} < r \leq \sqrt{10}$ において、 C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積は r の値に対して単調増加する。よって、その面積が最大となるのは

$$r = \sqrt{10}$$

のときである。このとき、 C_2 は

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 10$$

であり、点 $(2, 2)$ はこれを満たす。よって、このときの交点の座標は

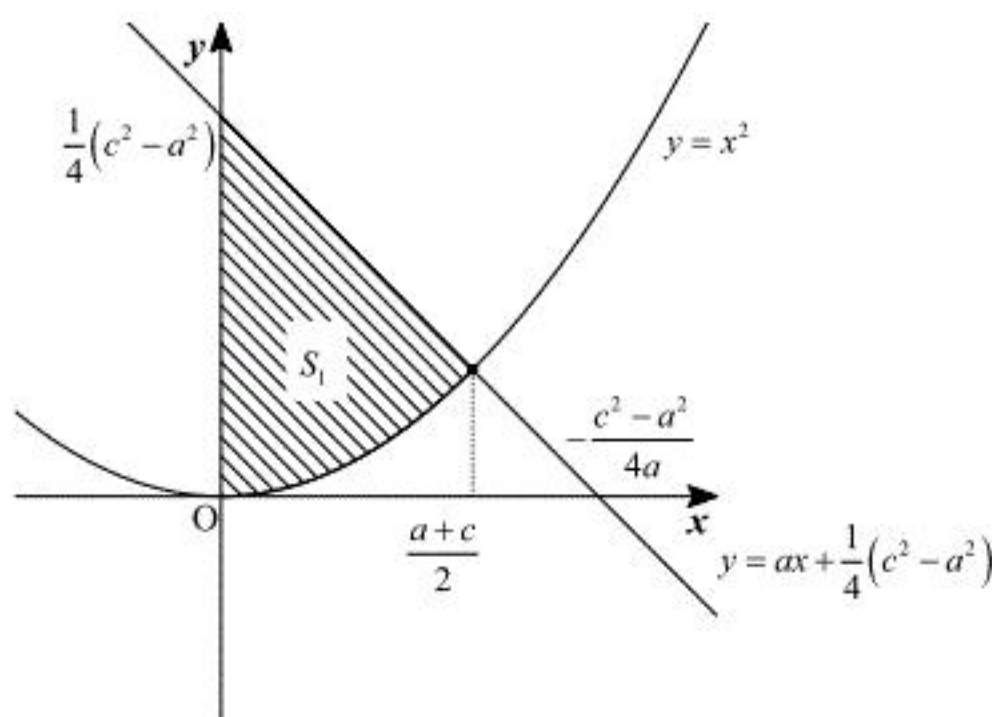
$$(2, 2), (4, 6)$$

である。

(答) $r = \sqrt{10}$, 2 交点の座標: $(2, 2), (4, 6)$

〔Ⅱ〕

(1)



$a < 0, c + a > 0$ より, $c > -a > 0$ である。直線 $y = ax + \frac{1}{4}(c^2 - a^2)$ と放物線 $y = x^2$ の式を連立すると,

$$\begin{aligned} x^2 &= ax + \frac{1}{4}(c^2 - a^2) \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{a+c}{2}\right)\left(x - \frac{a-c}{2}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{a \pm c}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで, $a - c < 0$ であるから, 第一象限における交点の x 座標は $x = \frac{a+c}{2}$ である。よって, 上図の斜線部の面積 S_1 は,

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\frac{a+c}{2}} \left\{ ax + \frac{1}{4}(c^2 - a^2) - x^2 \right\} dx \\ &= -\int_0^{\frac{a+c}{2}} \left(x - \frac{a-c}{2}\right)\left(x - \frac{a+c}{2}\right) dx \\ &= -\int_0^{\frac{a+c}{2}} \left(x - \frac{a+c}{2} + c\right)\left(x - \frac{a+c}{2}\right) dx \\ &= -\int_0^{\frac{a+c}{2}} \left\{ \left(x - \frac{a+c}{2}\right)^2 + c\left(x - \frac{a+c}{2}\right) \right\} dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{a+c}{2}\right)^3 + \frac{c}{2}\left(x - \frac{a+c}{2}\right)^2 \right]_0^{\frac{a+c}{2}} \\ &= \frac{1}{24}(a+c)^2(2c-a) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_1 = \frac{1}{24}(a+c)^2(2c-a)$$

(2)

直線 $y = ax + \frac{1}{4}(c^2 - a^2)$ と x 軸との交点は, $c = -ka$ を代入して,

$$x = -\frac{1}{4a}(c^2 - a^2) = -\frac{a}{4}(k^2 - 1)$$

である。よって

$$S_2 = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{a}{4}(k^2 - 1) \right\} \cdot \frac{1}{4}(c^2 - a^2) = -\frac{a^3}{32}(k^2 - 1)^2$$

となる。また,

$$S_1 = \frac{1}{24}(a+c)^2(2c-a) = -\frac{a^3}{24}(k-1)^2(2k+1)$$

となる。したがって,

$$S_1 : S_2 = -\frac{a^3}{24}(k-1)^2(2k+1) : -\frac{a^3}{32}(k^2-1)^2 = 4(2k+1) : 3(k+1)^2$$

である。

$$(\text{答}) \quad S_1 : S_2 = 4(2k+1) : 3(k+1)^2$$

(3)

$S_1 = \frac{1}{2}S_2$ より, $S_1 : S_2 = 1 : 2$ であるから,

$$\begin{aligned} 4(2k+1) : 3(k+1)^2 &= 1 : 2 \\ \Leftrightarrow 3(k+1)^2 &= 8(2k+1) \\ \Leftrightarrow 3k^2 - 10k - 5 &= 0 \\ \therefore k &= \frac{5 \pm 2\sqrt{10}}{3} \end{aligned}$$

となる。ここで, $a < 0, c + a > 0$ より

$$-ka + a > 0 \Leftrightarrow k > 1$$

であるから,

$$k = \frac{5 + 2\sqrt{10}}{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad k = \frac{5 + 2\sqrt{10}}{3}$$

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)	①		
	$(3, -1)$		
(2)	②	③	④
	$3a$	$-a$	$s = -3t$
(3)	⑤	⑥	⑦
	$\sqrt{10} a-1 $	$\frac{\sqrt{10}}{4} + \frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{10}}{4} + \frac{1}{2}$

※⑥⑦は順不同

〔解説〕

(1)

円 D_1 の方程式を変形すると、

$$(x^2 + y^2 - 10) + a(-6x + 2y + 20) = 0$$

となる。上式が a の値に関わらず成り立つとき、

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10 = 0 \\ -6x + 2y + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 10 = 0 \\ y = 3x - 10 \end{cases}$$

となる。これらの式より y を消去すると、

$$\begin{aligned} x^2 + (3x - 10)^2 - 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 3)^2 &= 0 \\ \therefore x &= 3 \end{aligned}$$

であり、このとき $y = -1$ であるから、円 D_1 は a の値に関わらず定点 $(3, -1)$ を通る。

(2)

円 D_1 の方程式を変形すると、

$$(x - 3a)^2 + (y + a)^2 = 10(a - 1)^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となるから、円 D_1 の中心を $P(s, t)$ とすると、

$$(s, t) = (3a, -a)$$

であり、これから a を消去すると、関係式 $s = -3t$ を満たすことがわかる。

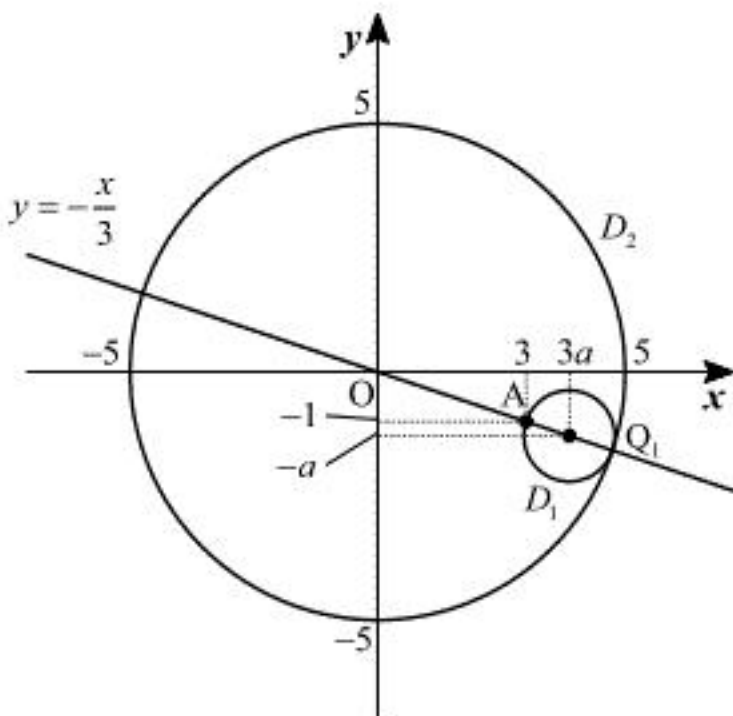
(3)

①より、円 D_1 の半径は $\sqrt{10}|a - 1|$ であり、円 D_2 は原点を中心とする半径 5 の円である。(1)で求めた定点を A $(3, -1)$ とすると、円 D_1, D_2 の中心および点 A はすべて直線 $y = -\frac{x}{3}$ 上に存在する。また、

$$OA = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} < 5$$

であるから、点 A は円 D_2 の内側に存在する。ここで、 a の値によって場合分けをして考える。

[1] $a > 1$ のとき



円 D_1 と円 D_2 などの関係を図示すると上図のようになる。円 D_1 と円 D_2 は上図の点 Q_1 で接する。このとき、次の関係

$$OA + AQ_1 = OQ_1$$

が成り立ち、

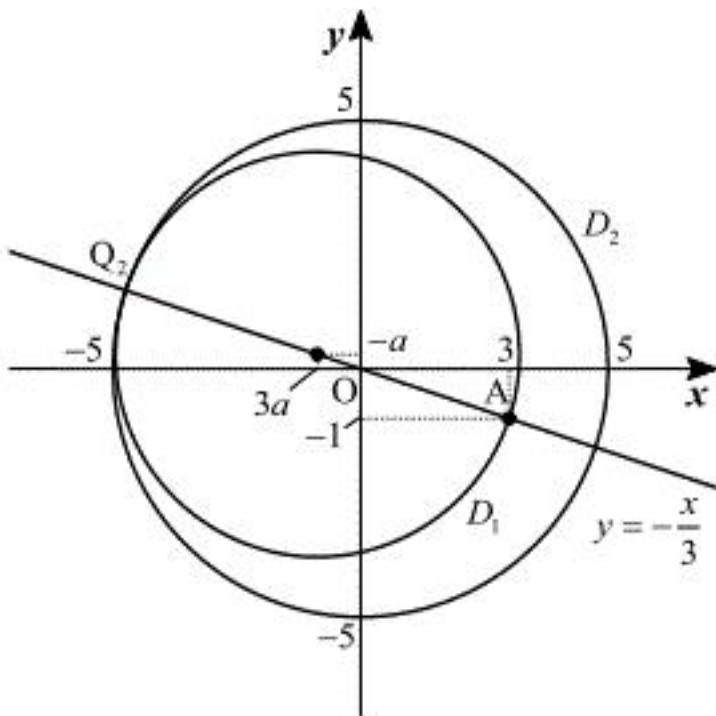
$$AQ_1 = 2 \cdot \sqrt{10}|a - 1| = 2\sqrt{10}(a - 1)$$

であるから、

$$\sqrt{10} + 2\sqrt{10}(a - 1) = 5 \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{10}}{4} + \frac{1}{2}$$

となる。

[2] $a < 1$ のとき



円 D_1 と円 D_2 などの関係を図示すると上図のようになる。円 D_1 と円 D_2 は上図の点 Q_2 で接する。このとき、次の関係

$$AQ_2 - OA = OQ_2$$

が成り立ち、

$$AQ_2 = 2 \cdot \sqrt{10}|a - 1| = 2\sqrt{10}(1 - a)$$

であるから、

$$2\sqrt{10}(1 - a) - \sqrt{10} = 5 \Leftrightarrow a = -\frac{\sqrt{10}}{4} + \frac{1}{2}$$

となる。

[3] $a = 1$ のとき

方程式 D_1 は点 $(x, y) = (3, -1)$ のみを示すから、円 D_1 と円 D_2 は接しない。

以上[1], [2], [3]より、円 D_1 と円 D_2 が接するときの a の値は

$$a = \frac{\sqrt{10}}{4} + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{4} + \frac{1}{2}$$

である。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤
$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{671}{1296}$	$1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

〔解説〕

(1)

サイコロを振ったときに出る目は6通りであり、これらは同様に確からしく起こる。以下、サイコロを n 回目に振ったときに出た目を X_n とする。2回振って終了するのは、出た目が次のようになるときである。

1回目	2回目
X_1	$X_2 (= X_1)$

よって、2回振って終了する確率は

$$1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

である。

(2)

3回振って終了するのは、出た目が次のようになるときである。

1回目	2回目	3回目
X_1	$X_2 (\neq X_1)$	$X_3 (= X_2)$

よって、3回振って終了する確率は

$$1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$

である。

(3)

4回振って終了するのは、出た目が次のようになるときである。

1回目	2回目	3回目	4回目
X_1	$X_2 (\neq X_1)$	$X_3 (\neq X_2)$	$X_4 (= X_3)$

よって、4回振って終了する確率は

$$1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$$

である。

(4)

5回振って終了するのは、出た目が次のようになるときである。

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目
X_1	$X_2 (\neq X_1)$	$X_3 (\neq X_2)$	$X_4 (\neq X_3)$	$X_5 (= X_4)$

よって、5回振って終了する確率は

$$1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{125}{1296}$$

である。したがって、5回以内に終了する確率は、(1), (2), (3)の結果と合わせて

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216} + \frac{125}{1296} = \frac{671}{1296}$$

であることがわかる。

(5)

n 回($n \geq 2$)以内に終了しないのは、出た目が次のようになるときである。

1回目	2回目	3回目	...	n 回目
X_1	$X_2 (\neq X_1)$	$X_3 (\neq X_2)$	...	$X_n (\neq X_{n-1})$

よって、 n 回($n \geq 2$)以内に終了しない確率は

$$1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

である。したがって、 n 回($n \geq 2$)以内に終了する確率は、余事象を考えて

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

であることがわかる。