

〔Ⅰ〕

〔解答〕

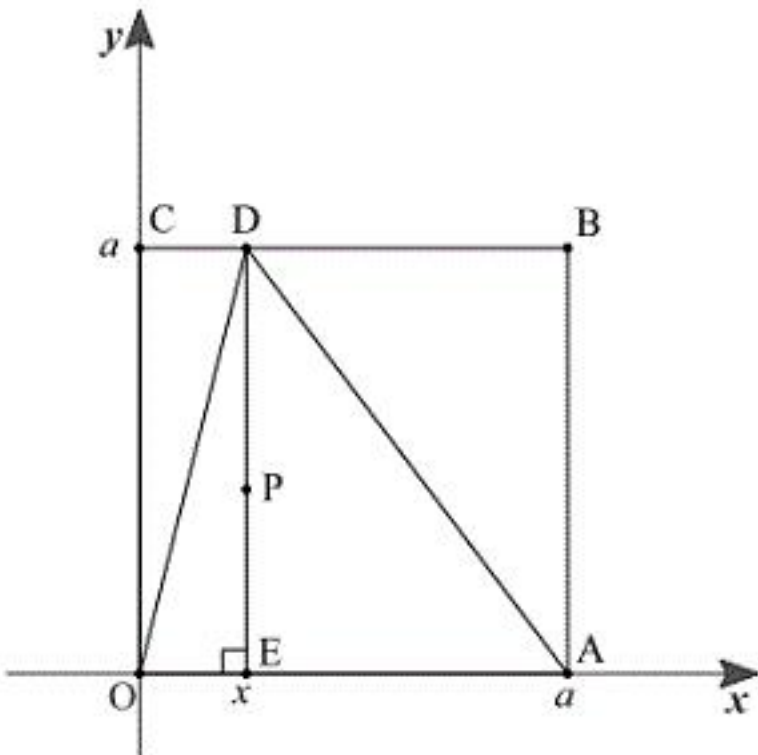
①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
ax	$\frac{x}{a}$	$\frac{a-x}{a}$	$\frac{y^2}{a^2}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{3}$

〔解説〕

点Pが正方形OABCの内部にあり、かつ△OAPが直角三角形となるのは、 $\angle OPA = 90^\circ$ となる場合である。よって、このとき、点PはOAの中点 $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ を中心とする半径 $\frac{a}{2}$ の円周上に存在する。したがって、

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 &= \frac{a^2}{4} \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 &= ax \end{aligned}$$

が成り立つ。正方形OABCおよび点P, D, Eを図示すると、以下のようになる。



上図において直角三角形DEOに着目すると、

$$\begin{aligned} \tan \angle EDO &= \frac{OE}{DE} \\ &= \frac{x}{a} \end{aligned}$$

となる。同様に、直角三角形DEAについて、

$$\begin{aligned} \tan \angle EDA &= \frac{AE}{DE} \\ &= \frac{a-x}{a} \end{aligned}$$

となる。したがって、加法定理より、

$$\begin{aligned} \tan \angle ADO &= \tan(\angle EDO + \angle EDA) \\ &= \frac{\tan \angle EDO + \tan \angle EDA}{1 - \tan \angle EDO \tan \angle EDA} \\ &= \frac{\frac{x}{a} + \frac{a-x}{a}}{1 - \frac{x}{a} \cdot \frac{a-x}{a}} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{ax - x^2}{a^2}} \end{aligned}$$

となる。ここで①より、 $ax - x^2 = y^2$ であるから、

$$\tan \angle ADO = \frac{1}{1 - \frac{y^2}{a^2}}$$

と表すことができる。さらに、 $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ であったことと、点Pが正方形ABCDの内部にあることから、 $0 < y^2 \leq \frac{a^2}{4}$ を満たすため、 $x = \frac{a}{2}$ のとき、 y^2 は最大値 $\frac{a^2}{4}$ をとる。このとき、 $\frac{y^2}{a^2}$ は最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。以上より、

$$1 < \tan \angle ADO = \frac{1}{1 - \frac{y^2}{a^2}} \leq \frac{4}{3}$$

が成立するから、 $\tan \angle ADO$ の最大値は $\frac{4}{3}$ である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
a^3-3ab^2	$3a^2b-b^3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	9

〔解説〕

$$\begin{aligned}(a+bi)^3 &= a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i \\ &= a^3-3ab^2+(3a^2b-b^3)i\end{aligned}$$

より、 $(a+bi)^3$ の実部は a^3-3ab^2 、虚部は $3a^2b-b^3$ である。よって、 $(a+bi)^3=-1$ が成立する

ための条件は、複素数の相等条件より、

$$\begin{cases} a^3-3ab^2=-1 & \cdots (i) \\ 3a^2b-b^3=0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

である。ここで、(ii)式が成立するとき、

$$\begin{aligned}b(3a^2-b^2)&=0 \\ \therefore b=0, b^2=3a^2\end{aligned}$$

を満たす。よって、以下では b の値に応じて場合分けをして考える。

[1] $b=0$ のとき

$$\begin{aligned}(i)\text{式に } b=0 \text{ を代入すると、} \\ a^3 &= -1 \\ \Leftrightarrow (a+1)(a^2-a+1) &= 0\end{aligned}$$

が得られ、 a は実数より、 $a=-1$ となる。このとき、 $(a+bi)^3=-1$ となる。

[2] $b\neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}(ii)\text{式が成立するための条件は、} b^2=3a^2 \text{ である。したがって、}(i)\text{式に } b^2=3a^2 \text{ を代入して、} \\ a^3-9a^3 &= -1 \\ \Leftrightarrow a^3 &= \frac{1}{8} \\ \Leftrightarrow \left(a-\frac{1}{2}\right)\left(a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\right) &= 0\end{aligned}$$

が得られ、 a は実数より、 $a=\frac{1}{2}$ となる。このとき、 $b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ であり、 $(a+bi)^3=-1$ となる。

以上[1],[2]より、 $(a+bi)^3=-1$ を満たす a, b を求めると、 $(a, b)=(-1, 0)$ または $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で

ある。次に、 $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ とすると、 z は $z^3=-1$ を満たすから、

$$\begin{aligned}z^3 &= -1 \\ \Leftrightarrow (z+1)(z^2-z+1) &= 0\end{aligned}$$

が成立し、 $z\neq -1$ より、 z は $z^2-z+1=0$ を満たす。よって、

$$\begin{aligned}z^4+z^2+1 &= z^3\cdot z+z^2+1 \\ &= (-1)\cdot z+z^2+1 \\ &= z^2-z+1 \\ &= 0\end{aligned}$$

を得る。また、

$$\begin{aligned}z^{12}+z^8+z^4+1 &= (z^3)^4+(z^3)^2\cdot z^2+z^3\cdot z+1 \\ &= (-1)^4+(-1)^2\cdot z^2+(-1)\cdot z+1 \\ &= (z^2-z+1)+1 \\ &= 1\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}z^{10}+\frac{1}{z^{10}}+10 &= (z^3)^3\cdot z+\frac{z^2}{(z^3)^4}+10 \\ &= (-1)^3\cdot z+\frac{z^2}{(-1)^4}+10 \\ &= z^2-z+10 \\ &= (z^2-z+1)+9 \\ &= 9\end{aligned}$$

である。

〔Ⅲ〕

(1)

$t = 2^x$ とおくと、与式は

$$\begin{aligned} 4^x - 2^{x+3} + 15 &= (2^x)^2 - 2^3 \cdot 2^x + 15 \\ &= t^2 - 8t + 15 \end{aligned}$$

と表せる。

(答) $t^2 - 8t + 15$

(2)

$t = 2^x$ について、 x が実数全体を動くから、 t は $t > 0$ となる実数をとる。よって、(1)より、

$$\begin{aligned} y &= t^2 - 8t + 15 \\ &= (t - 4)^2 - 1 \end{aligned}$$

と変形でき、 $t = 4$ のとき、すなわち、

$$\begin{aligned} 2^x &= 4 \\ \therefore x &= 2 \end{aligned}$$

のとき、 y は最小値 -1 をとる。

(答) $x = 2$ のとき、最小値 -1

(3)

(1)より、 t についての2次方程式 $t^2 - 8t + 15 = 0$ を解けばよい。これを解くと、

$$\begin{aligned} t^2 - 8t + 15 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t - 3)(t - 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 3, 5 \\ \therefore 2^x &= 3, 5 \end{aligned}$$

となる。このうち、(2)で求めた x の値より大きいものは、 $2^x = 5$ を満たす x であるから、求める値は $x = \log_2 5$ である。

(答) $x = \log_2 5$