

【1】

(1)

l は $(a, a^2), (b, b^2) (a \neq b)$ の 2 点を通る直線だから、

$$y = \frac{b^2 - a^2}{b - a}(x - a) + a^2$$

$$\Leftrightarrow y = (b + a)x - ab$$

と表すことができる。この直線の傾きが m であるから、

$$b + a = m$$

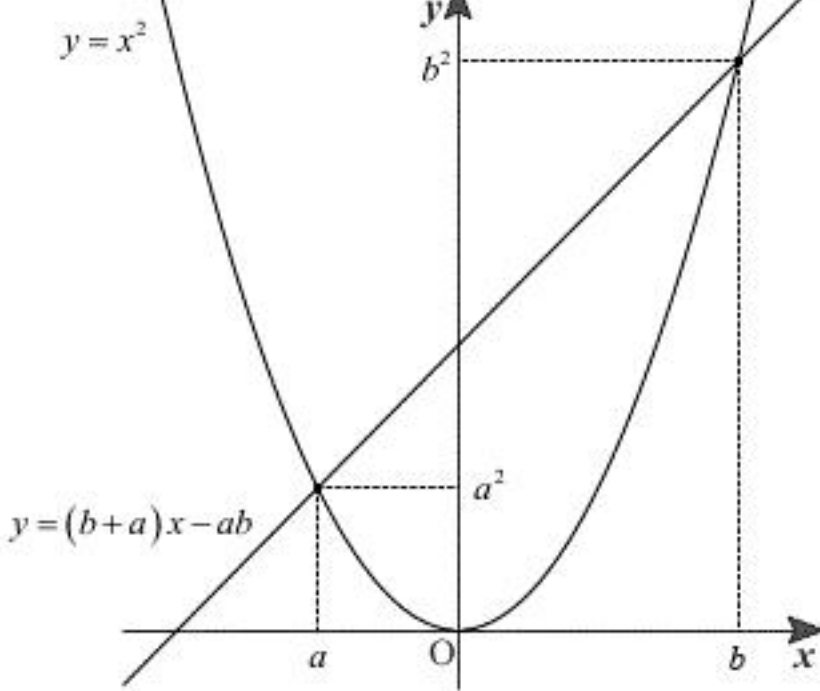
$$\therefore b = m - a$$

である。

(答) $b = m - a$

ここで直線 l と放物線 C とで囲まれる領域の面積について、 $a < b$ の場合と $a > b$ の場合に分けて考える。

[1] $a < b$ の場合



$$x^2 - \{(b+a)x - ab\} = x^2 - (b+a)x + ab$$

$$= (x-a)(x-b)$$

であるから、区間 $[a, b]$ において

$$(x-a)(x-b) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq (b+a)x - ab$$

となる。よって直線 l と放物線 C とで囲まれる領域の面積は、

$$\int_a^b \{(b+a)x - ab - x^2\} dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(b+a)x^2 - abx \right]_a^b$$

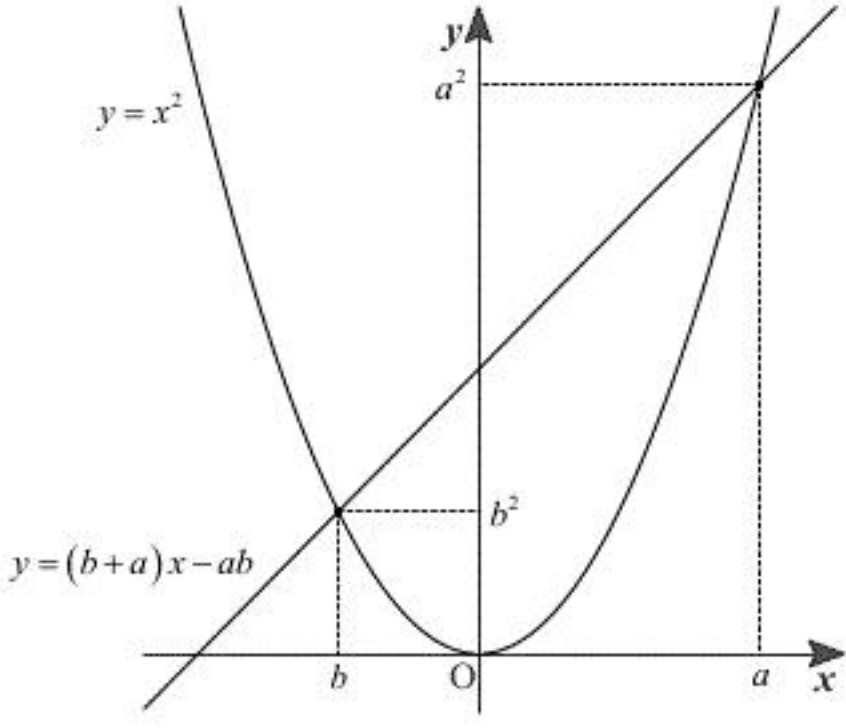
$$= -\frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{2}(b+a)b^2 - ab^2 - \left\{ -\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}(b+a)a^2 - a^2b \right\}$$

$$= \frac{1}{6}b^3 - \frac{1}{2}ab^2 - \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}a^2b$$

$$= \frac{1}{6}(b-a)^3$$

と求まる。また、 $a < b$ という仮定より $b-a > 0$ だから、 $\frac{1}{6}(b-a)^3 = \frac{1}{6}|b-a|^3$ である。

[2] $a > b$ の場合



[1] の場合と同様に、区間 $[b, a]$ において、

$$x^2 \leq (b+a)x - ab$$

である。よって直線 l と放物線 C とで囲まれる領域の面積は、

$$\int_b^a \{(b+a)x - ab - x^2\} dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(b+a)x^2 - abx \right]_b^a$$

$$= -\frac{1}{3}a^3 + (b+a)a^2 - a^2b - \left\{ -\frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{2}(b+a)b^2 - ab^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{6}(a-b)^3$$

と求まる。また、 $a > b$ という仮定より $a-b > 0$ だから、 $\frac{1}{6}(a-b)^3 = \frac{1}{6}|b-a|^3$ である。

以上より、どちらの場合でも直線 l と放物線 C とで囲まれる領域の面積 S は $\frac{1}{6}|b-a|^3$ である。

(証明終)

(2)

$(x^2)' = 2x$ より、点 P を通り傾きが $2a$ である直線は放物線 C の点 P における接線であるため、そのような直線と放物線 C で囲まれる部分は存在しない。したがって、

$$2a \neq \sqrt{3} \text{ かつ } 2a \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore a \neq \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。このもとで(1)より、 $b = m - a, Q(b, b^2)$ であるから、傾きが $\sqrt{3}$ である直線 l_1 と放物線 C との交点のうち、 P とは異なる点を Q_1 とすると、 Q_1 の座標は

$$Q_1(\sqrt{3} - a, (\sqrt{3} - a)^2)$$

とわかる。同様に、直線 l_2 と放物線 C との交点のうち P とは異なる点を Q_2 とすると Q_2 の座標は

$$Q_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - a, \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - a\right)^2\right)$$

である。さらに、(1)より $S = \frac{1}{6}|b-a|^3$ であるから、

$$S_1 = \frac{1}{6}|\sqrt{3} - a - a|^3$$

$$= \frac{1}{6}|\sqrt{3} - 2a|^3$$

$$S_2 = \frac{1}{6}\left|\frac{1}{\sqrt{3}} - a - a\right|^3$$

$$= \frac{1}{6}\left|\frac{1}{\sqrt{3}} - 2a\right|^3$$

と求まる。 $S_1 : S_2 = 8 : 1$ より、

$$\frac{S_1}{S_2} = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{6}|\sqrt{3} - 2a|^3}{\frac{1}{6}\left|\frac{1}{\sqrt{3}} - 2a\right|^3} = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\sqrt{3} - 2a|^3}{\left|\frac{1}{\sqrt{3}} - 2a\right|^3} = 8$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{3} - 2a}{\frac{1}{\sqrt{3}} - 2a}\right|^3 = 2^3$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{3} - 2a}{\frac{1}{\sqrt{3}} - 2a}\right| = 2$$

である。よって、 $\frac{\sqrt{3} - 2a}{\frac{1}{\sqrt{3}} - 2a} = 2$ または $\frac{\sqrt{3} - 2a}{\frac{1}{\sqrt{3}} - 2a} = -2$ である。

[1] $\frac{\sqrt{3} - 2a}{\frac{1}{\sqrt{3}} - 2a} = 2$ の場合

$$\frac{\sqrt{3} - 2a}{\frac{1}{\sqrt{3}} - 2a} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} - 2a = \frac{2}{\sqrt{3}} - 4a$$

$$\therefore a = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

である。

[2] $\frac{\sqrt{3} - 2a}{\frac{1}{\sqrt{3}} - 2a} = -2$ の場合

$$\frac{\sqrt{3} - 2a}{\frac{1}{\sqrt{3}} - 2a} = -2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} - 2a = -\frac{2}{\sqrt{3}} + 4a$$

$$\therefore a = \frac{5\sqrt{3}}{18}$$

である。

以上[1],[2]より、 $a = -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{5\sqrt{3}}{18}$ である。これらは①を満たしている。

(答) $a = -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{5\sqrt{3}}{18}$

〔Ⅱ〕

(1)

A, B, C は三角形の内角であるから $A+B+C=\pi$ である。よって $A=\frac{\pi}{3}$ のとき, $B+C=\frac{2}{3}\pi$ となる。ここで, 積和の公式

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$$

を用いれば,

$$\begin{aligned} \sin B \sin C &= -\frac{1}{2} \{ \cos(B+C) - \cos(B-C) \} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \cos \frac{2}{3}\pi - \cos(B-C) \right\} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos(B-C) \end{aligned}$$

となる。C のとりうる値の範囲は, $B>0, C>0$ であることから $0<C<\frac{2}{3}\pi$ である。さらに,

$$B+C=\frac{2}{3}\pi \Leftrightarrow B-C=\frac{2}{3}\pi-2C \text{ であることから,}$$

$$-\frac{2}{3}\pi < B-C < \frac{2}{3}\pi$$

を得る。よって, $-\frac{1}{2} < \cos(B-C) \leq 1$ であるから,

$$0 < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos(B-C) \leq \frac{3}{4}$$

$$\therefore 0 < \sin B \sin C \leq \frac{3}{4}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad 0 < \sin B \sin C \leq \frac{3}{4}$$

(2)

$A+B+C=\pi \Leftrightarrow B+C=\pi-A$ であるから, 和積の公式

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

を用いることで

$$\begin{aligned} \sin B + \sin C &= 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \\ &= 2 \sin \frac{\pi-A}{2} \cos \frac{B-C}{2} \\ &= 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} \end{aligned}$$

を得る。ここで, $C=\pi-A-B, B>0$ より, $0<C<\pi-A$ であり,

$$B+C=\pi-A \Leftrightarrow B-C=\pi-A-2C$$

である。よって,

$$\begin{aligned} -(\pi-A) &< B-C < \pi-A \\ \Leftrightarrow -\frac{\pi-A}{2} &< \frac{B-C}{2} < \frac{\pi-A}{2} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi-A}{2} &< \cos \frac{B-C}{2} \leq 1 \\ \Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} &< \cos \frac{B-C}{2} \leq 1 \end{aligned}$$

となる。 $0<A<\pi$ より, $\cos \frac{A}{2} > 0$ であるから,

$$2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2} < 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} \leq 2 \cos \frac{A}{2}$$

$$\therefore \sin A < \sin B + \sin C \leq 2 \cos \frac{A}{2}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \sin A < \sin B + \sin C \leq 2 \cos \frac{A}{2}$$

(3)

積和の公式を用いれば,

$$\sin B \sin C = -\frac{1}{2} \{ \cos(B+C) - \cos(B-C) \}$$

であり, (2) と同様に, $B+C=\pi-A, -(\pi-A) < B-C < \pi-A$ であるから,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \{ \cos(B+C) - \cos(B-C) \} &= -\frac{1}{2} \{ \cos(\pi-A) - \cos(B-C) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \cos A + \cos(B-C) \} \end{aligned}$$

$$\cos(\pi-A) < \cos(B-C) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\cos A < \cos(B-C) \leq 1$$

となる。以上より,

$$\frac{1}{2} \{ \cos A - \cos A \} < \frac{1}{2} \{ \cos A + \cos(B-C) \} \leq \frac{1}{2} (\cos A + 1)$$

$$\therefore 0 < \sin B \sin C \leq \frac{1}{2} (\cos A + 1)$$

となる。

$$\text{(答)} \quad 0 < \sin B \sin C \leq \frac{1}{2} (\cos A + 1)$$

【Ⅲ】

【解答】

(1)	①	②		
	$5a^2-17a+\frac{61}{4}$	$\frac{17}{10}$		
(2)	③			
	$\left(\frac{1}{2}-a\right)^2 k^2+4\left(\frac{1}{2}-a\right)k+4$			
(3)	④	⑤	⑥	⑦
	$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$	$-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+13)$	$\frac{1}{24}n(2n^2+27n+121)$	$\frac{2n+13}{4n+2}$

【解説】

(1)

$A_i\left(i,\frac{1}{2}i+2\right), B_i(i,ia)$ であるから, 線分 A_iB_i の長さ d_i は,

$$\begin{aligned}d_i&=\left|\frac{1}{2}i+2-ia\right|\\&=\left|\left(\frac{1}{2}-a\right)i+2\right|\end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}d_1^2+d_2^2&=\left|\left(\frac{1}{2}-a\right)\cdot1+2\right|^2+\left|\left(\frac{1}{2}-a\right)\cdot2+2\right|^2\\&=\left|\frac{5}{2}-a\right|^2+|3-2a|^2\\&=\left(\frac{25}{4}-5a+a^2\right)+(9-12a+4a^2)\\&=5a^2-17a+\frac{61}{4}\end{aligned}$$

である。また,

$$5a^2-17a+\frac{61}{4}=5\left(a-\frac{17}{10}\right)^2+\frac{4}{5}$$

であるから, $d_1^2+d_2^2$ が最小となるのは $a=\frac{17}{10}$ のときである。

(2)

(1)より, $d_k=\left|\left(\frac{1}{2}-a\right)k+2\right|$ であるから,

$$\begin{aligned}d_k^2&=\left|\left(\frac{1}{2}-a\right)k+2\right|^2\\&=\left(\frac{1}{2}-a\right)^2 k^2+4\left(\frac{1}{2}-a\right)k+4\end{aligned}$$

である。

(3)

(2)より $d_k^2=\left(\frac{1}{2}-a\right)^2 k^2+4\left(\frac{1}{2}-a\right)k+4$ であるから,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^n\left\{\left(\frac{1}{2}-a\right)^2 k^2+4\left(\frac{1}{2}-a\right)k+4\right\}\\&=\left(\frac{1}{2}-a\right)^2 \sum_{k=1}^n k^2+4\left(\frac{1}{2}-a\right)\sum_{k=1}^n k+\sum_{k=1}^n 4\\&=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}-a\right)^2 \cdot n(n+1)(2n+1)+2\left(\frac{1}{2}-a\right)\cdot n(n+1)+4n\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)a^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+13)a+\frac{1}{24}n(2n^2+27n+121)\end{aligned}$$

と求まる。これを平方完成すると,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)a^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+13)a+\frac{1}{24}n(2n^2+27n+121)\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\left(a-\frac{2n+13}{4n+2}\right)^2+\frac{1}{24}n\left\{2n^2+27n+121-\frac{(n+1)(2n+13)^2}{2n+1}\right\}\end{aligned}$$

となるから, $\sum_{k=1}^n d_k^2$ が最小となるのは $a=\frac{2n+13}{4n+2}$ のときである。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

(1)	①	②		
	48	304		
(2)	③	④	⑤	⑥
	120	896	896	$(n, -n-1)$

〔解説〕

(1)

点 P の x 座標はさいころを振るたびに、その目に関係なく 1 だけ大きくなり、最初 P は $(0, 0)$ にあるから、さいころを振った回数をそのまま反映する。 y 座標に対してはさいころを振るたびに $+1, +0, -1$ のいずれかの操作が行われる。 $1, 0, -1$ の重複を許した 3 つの組み合わせで、その総和が 1 になるようなものは、

$$(0, 0, 1), (-1, 1, 1)$$

の 2 通りがあり、それぞれに対して並べ方が 3 通り存在する。さらにそれぞれの操作に対して目の出方は 2 通りあるから、P が $(3, 1)$ に到達する目の出方は、

$$2 \cdot 3 \cdot 2^3 = 48 \text{ (通り)}$$

である。また、 $1, 0, -1$ の重複を許した 4 つ組み合わせで、その総和が 0 になるようなものは、

$$(0, 0, 0, 0), (-1, 0, 0, 1), (-1, -1, 1, 1)$$

の 3 通りがある。 $(0, 0, 0, 0)$ の並べ方は 1 通り、 $(-1, 0, 0, 1)$ の並べ方は $\frac{4!}{2!} = 12$ 通り、

$(-1, -1, 1, 1)$ の並べ方は $\frac{4!}{2!2!} = 6$ 通り存在し、それぞれの操作に対して目の出方は 2 通りある

から、P が $(4, 0)$ に到達する目の出方は、

$$(1+12+6) \cdot 2^4 = 304 \text{ (通り)}$$

である。

(2)

(1)と同様に、P の x 座標はさいころを振った回数を表し、 y 座標に対してはさいころを振るたびに $+1, +0, -1$ のいずれかの操作がなされる。 $1, 0, -1$ の重複を許した 3 つの組み合わせで、その総和が 1 になるようなものは

$$(0, 0, 1), (-1, 1, 1)$$

の 2 通りがあり、それぞれに対して並べ方は 3 通りある。 $-1, 1$ に対応する目の出方はそれぞれ 2 通りあり、0 に対応する目の出方は 4 通りあるから、P が $(3, 1)$ に到達する目の出方は、

$$(4^2 \cdot 2 + 2^3) \cdot 3 = 120 \text{ (通り)}$$

である。また、 $-1, 0, 1$ の重複を許した 4 つの組み合わせで、その総和が 1 になるようなものは、

$$(0, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 1)$$

である。 $(0, 0, 0, 1)$ の並べ方は 4 通りであり、 $(-1, 0, 1, 1)$ の並べ方は $\frac{4!}{2!} = 12$ 通りあるため、そ

れぞれの操作に対応する目の出方を考えれば、P が $(4, 1)$ に到達するような目の出方は、

$$4^3 \cdot 2 \cdot 4 + 2^3 \cdot 4 \cdot 12 = 896 \text{ (通り)}$$

である。P が $(4, -1)$ に到達する目の出方の総数は、対称性より P が $(4, 1)$ に到達する目の出方の総数と等しく 896 通りである。さいころを振るたびに P の x 座標は 1 だけ大きくなり、 y 座標に対しては $+1, +0, -1$ のいずれかの操作がなされるから、P は $m \geq |n|$ となる (m, n) には到達できるが、 $m < |n|$ となる (m, n) には到達できない。よって、 $(n, n-1), (n, 0), (n, -n-1)$ のうち P が到達できない格子点は $(n, -n-1)$ である。