

【I】

【解答】

(1)

$f(x) = \frac{e^x}{\sin x}$ を微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad f'(x) = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$$

(2)

$f(x) = \frac{e^x}{\sin x}$ より、定義域は k を整数として、

$$\begin{aligned} \sin x &\neq 0 \\ \Leftrightarrow x &\neq k\pi \end{aligned}$$

である。ここで $f'(x)$ は

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{\sin^2 x} \\ &= \frac{e^x \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

と変形されるから、 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \left(\because 0 < x < 2\pi \right)$ である。よって

$0 < x < \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} < x < 2\pi$ のとき $f'(x) < 0$, $\frac{\pi}{4} < x < \pi, \pi < x < \frac{5\pi}{4}$ のとき $f'(x) > 0$ であるので、

$0 < x < 2\pi$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	(π)	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$			$\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$				$-\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi}$		

従って、 $f(x)$ は $x = \frac{\pi}{4}$ のとき極小値 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$, $x = \frac{5}{4}\pi$ のとき極大値 $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi}$ を

とる。

$$\text{(答)} \quad \text{極小値 } \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} \left(x = \frac{\pi}{4} \right), \text{ 極大値 } -\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi} \left(x = \frac{5}{4}\pi \right)$$

$$(3) \quad a_k = \sqrt{2}e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}}$$

(4)

(3)の結果を代入すると、求める答えは区分求積法より、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (a_k)^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{2}e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi \frac{k}{n}} \\ &= \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} \right)^0 \cdot \int_0^1 e^{2\pi x} dx \\ &= \left[\frac{1}{2\pi} e^{2\pi x} \right]_0^1 \\ &= \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \end{aligned}$$

と計算される。

$$\text{(答)} \quad \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi}$$

【解説】

(3)

l を整数として $2l\pi < x < 2l\pi + \pi, 2l\pi + \pi < x < 2l\pi + 2\pi$ における $f(x)$ の極小値を考える。

$$f'(x) = \frac{e^x \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2 x} \text{ より}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2l\pi + \frac{\pi}{4}, 2l\pi + \frac{5\pi}{4} \left(\because 2l\pi < x < 2l\pi + \pi, 2l\pi + \pi < x < 2l\pi + 2\pi \right)$ であり、(1)と同

様に考えると増減表は次のようになる。

x	$(2l\pi)$	$\cdots$	$2l\pi + \frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$(2l\pi + \pi)$	$\cdots$	$2l\pi + \frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$(2l\pi + 2\pi)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$			$\sqrt{2}e^{2l\pi + \frac{\pi}{4}}$				$-\sqrt{2}e^{2l\pi + \frac{5}{4}\pi}$		

従って、 $f(x)$ は $x = 2l\pi + \frac{\pi}{4}$ のとき極小値 $f\left(2l\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{2l\pi + \frac{\pi}{4}}$ をとる。 $2\pi < x$ から小さい

順に極小値を並べたものが a_k ($k \geq 1$) であるから、 $l = k$ として、

$$a_k = \sqrt{2}e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}} \quad (k \geq 1)$$

と表される。

【II】

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
3	$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$1+\sqrt{3}i$	2	$1-2\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$

〔解説〕

$$w=\frac{(\sqrt{3}+i)z}{2(z-2)}$$

より z は $z \neq 2$ で定義される。この式に $w=\sqrt{3}$ を代入して、

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= \frac{(\sqrt{3}+i)z}{2(z-2)} \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{3}z-4\sqrt{3} &= (\sqrt{3}+i)z \quad (\because z \neq 2) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{3}-i)z &= 4\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow z &= \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} \cdot \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} \\ \Leftrightarrow z &= \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}+i)}{3+1} \\ \Leftrightarrow z &= 3+\sqrt{3}i\end{aligned}$$

と計算される。このとき、点O(0)、点A(2)、点B(z)について、

$$\begin{aligned}\frac{2-z}{0-z} &= \frac{-1-\sqrt{3}i}{-3-\sqrt{3}i} \\ &= \frac{1+\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i} \cdot \frac{3-\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i} \\ &= \frac{(1+\sqrt{3}i)(3-\sqrt{3}i)}{9+3} \\ &= \frac{6+2\sqrt{3}i}{12} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)\end{aligned}$$

と計算されるから、 $\angle OBA = \frac{\pi}{6}$ となる。また、問題文より $w = \overline{w}$ を整理すると

$$\begin{aligned}w &= \overline{w} \\ \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{3}+i)z}{2(z-2)} &= \overline{\left(\frac{(\sqrt{3}+i)z}{2(z-2)} \right)} \\ \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{3}+i)z}{2(z-2)} &= \frac{\overline{(\sqrt{3}+i)} \cdot \overline{z}}{2(\overline{z}-2)} \\ \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{3}+i)z}{2(z-2)} &= \frac{(\sqrt{3}-i)\overline{z}}{2(\overline{z}-2)}\end{aligned}$$

と計算され、 $z \neq 2$ より、

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+i)z(\overline{z}-2) &= (\sqrt{3}-i)\overline{z}(z-2) \\ \Leftrightarrow 2iz\overline{z} - 2(\sqrt{3}+i)z + 2(\sqrt{3}-i)\overline{z} &= 0 \\ \Leftrightarrow z\overline{z} - (1-\sqrt{3}i)z - (1+\sqrt{3}i)\overline{z} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ z - (1+\sqrt{3}i) \right\} \left\{ \overline{z} - (1-\sqrt{3}i) \right\} - (1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ z - (1+\sqrt{3}i) \right\} \overline{\left\{ z - (1+\sqrt{3}i) \right\}} &= 4 \\ \Leftrightarrow \left| z - (1+\sqrt{3}i) \right|^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow \left| z - (1+\sqrt{3}i) \right| &= 2 \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と z のみの式に変形される。さらに、 α を

$$(1+2i)z + (1-2i)\overline{z} = 2-4\sqrt{3} \quad \cdots \textcircled{2}$$

と①の共有点とすると、式②において $z = \alpha$ として $\beta = (1+2i)\alpha$ を代入すると、

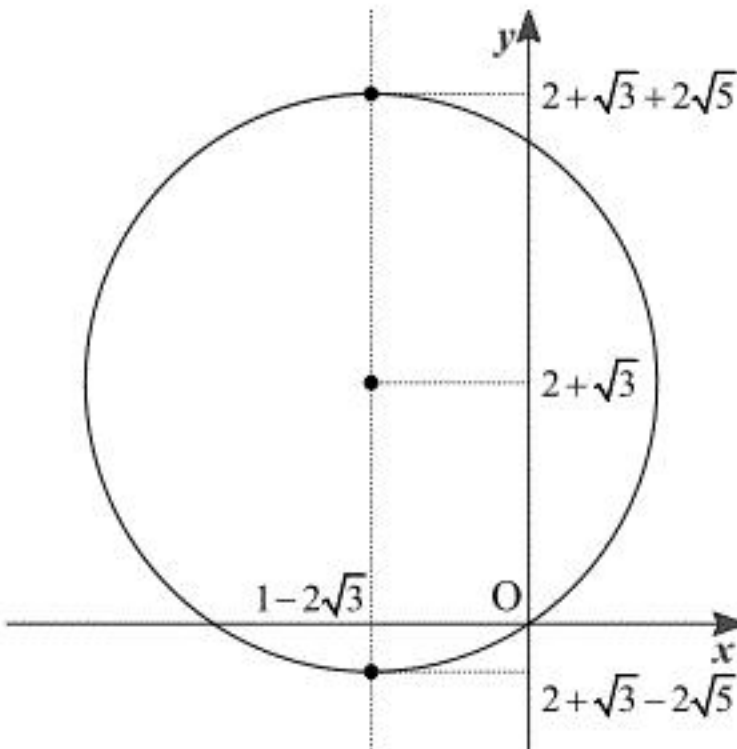
$$\begin{aligned}(1+2i)\alpha + (1-2i)\overline{\alpha} &= 2-4\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \beta + \overline{\beta} &= 2-4\sqrt{3} \quad (\because (1-2i)\overline{\alpha} = \overline{(1+2i)\alpha} = \overline{\beta}) \\ \Leftrightarrow \frac{\beta + \overline{\beta}}{2} &= 1-2\sqrt{3}\end{aligned}$$

と変形できるから、 β の実部は $1-2\sqrt{3}$ である。さらに、式①において $z = \alpha$ として $\beta = (1+2i)\alpha$ を代入すると、

$$\begin{aligned}\left| \frac{\beta}{1+2i} - (1+\sqrt{3}i) \right| &= 2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{|1+2i|} \left| \beta - (1+2i)(1+\sqrt{3}i) \right| &= 2 \\ \Leftrightarrow \left| \beta - \left\{ (1-2\sqrt{3}) + (2+\sqrt{3})i \right\} \right| &= 2\sqrt{1^2+2^2} \\ \Leftrightarrow \left| \beta - \left\{ (1-2\sqrt{3}) + (2+\sqrt{3})i \right\} \right| &= 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

と変形され、点 β は中心を表す複素数が $\left\{ (1-2\sqrt{3}) + (2+\sqrt{3})i \right\}$ であって、半径が $2\sqrt{5}$ である円周上にある。円の中心の実部と、点 β の実部が一致するから、下図のように考えて、

$\beta = 1-2\sqrt{3} + (2+\sqrt{3} \pm 2\sqrt{5})i$ となる。



ただし、 $z=0$ のとき $\beta = (1+2i)z = 0$ であり、 $z=2$ のとき $\beta = (1+2i)z = 3+6i$ であるから、点 α は点O(0)、A(2)に一致していないことが確認される。

【Ⅲ】

(1)

$$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

に, $b_n = a_n + 1$ を代入すると,

$$a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} + 1 = (a_n + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} = b_n^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また, $b_1 = a_1 + 1 = 2$ である。 b_n は帰納的に正であるから, 式①において底が 2 の対数をとって,

$$\log_2 b_{n+1} = \log_2 b_n^2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 b_{n+1} = 2 \log_2 b_n$$

とすると, $\log_2 b_n$ は初項 $\log_2 2 = 1$ で公比 2 の等比数列だから,

$$\log_2 b_n = 2^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow b_n = 2^{2^{n-1}}$$

と表される。

$$(\text{答}) b_{n+1} = b_n^2, \quad b_n = 2^{2^{n-1}}$$

(2)

$$b_n = 2^{2^{n-1}}$$

$$= 1 \cdot 2^{2^{n-1}} + 0 \cdot 2^{2^{n-1}-1} + \dots + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

と表されるから, b_n を 2 進数で表すと, $2^{n-1} + 1$ 桁である。

$$(\text{答}) \quad 2^{n-1} + 1 \text{ 桁}$$

(3)

$$a_n = b_n - 1$$

$$= 1 \cdot 2^{2^{n-1}} + 0 \cdot 2^{2^{n-1}-1} + \dots + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 - 1$$

$$= 1 \cdot 2^{2^{n-1}-1} + \dots + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

となり, 1 が 2^{n-1} 桁並ぶから, a_n を 2 進法で表したときの各位の和は, 2^{n-1} である。

$$(\text{答}) \quad 2^{n-1}$$

(4)

$c_n = b_n b_{n-1} \dots b_1$ であるので, 両辺正より底が 2 の対数をとると,

$$\log_2 c_n = \log_2 (b_1 b_2 \dots b_n)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 c_n = \log_2 b_1 + \log_2 b_2 + \dots + \log_2 b_n$$

$$\Leftrightarrow \log_2 c_n = \log_2 2^{2^0} + \log_2 2^{2^1} + \dots + \log_2 2^{2^{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 c_n = 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1}$$

と変形され, 右辺は初項 1 で公比 2 の等比級数の和であるから,

$$\log_2 c_n = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 c_n = 2^n - 1$$

$$\Leftrightarrow c_n = 2^{2^n - 1}$$

となる。これより,

$$\sqrt{2c_n} = \sqrt{2 \cdot 2^{2^n - 1}}$$

$$= 2^{\frac{2^n}{2}}$$

$$= 2^{2^{n-1}}$$

$$= b_n$$

と計算され,

$$a_n^2 = (b_n - 1)^2$$

$$= b_n^2 - 2b_n + 1$$

$$= b_n (b_n - 2) + 1$$

$$= \sqrt{2c_n} (2^{2^{n-1}} - 2) + 1$$

と表せるから, a_n^2 を $\sqrt{2c_n}$ で割った商は $2^{2^{n-1}} - 2$ であり, 余りは 1 である。

$$(\text{答}) \quad c_n = 2^{2^n - 1}, \quad \text{商: } 2^{2^{n-1}} - 2, \quad \text{余り: } 1$$

【IV】

【解答】

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
2	1	$\frac{7}{12}$	$\frac{13}{21}$	$(-1, -3), (-2, -2)$	50	$(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

【解説】

(1)

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sin 2\theta - \sqrt{3} \cos 2\theta \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\theta \right) \\ &= 2 \sin \left(2\theta - \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

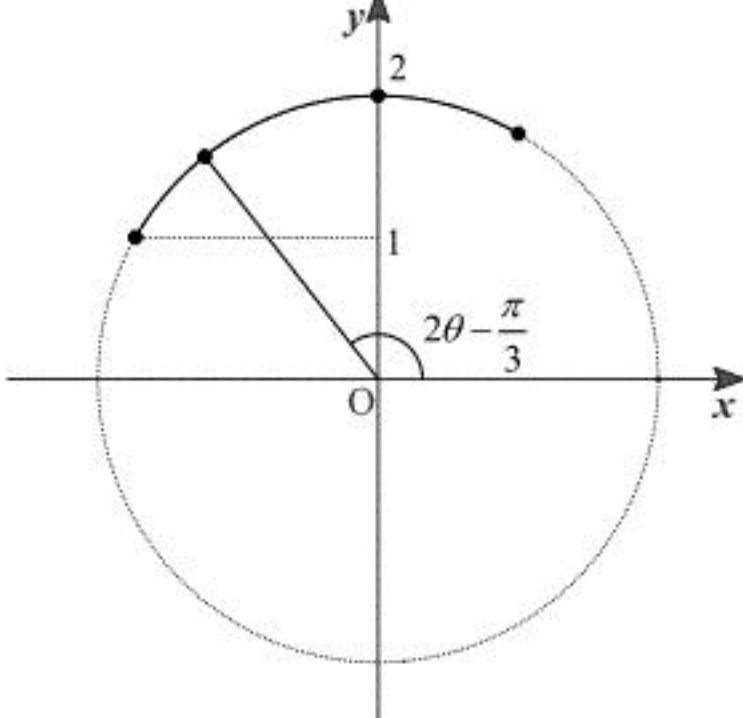
と表される。ここで $2\theta - \frac{\pi}{3}$ の範囲は

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{7}{12} \pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \leq 2\theta - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5}{6} \pi$$

であるから、この範囲において、下図のように原点が中心で半径が2の円上の点の y 座標を

考える。



これより、

$$2\theta - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{5}{12} \pi$$

のとき最大値2であり、

$$2\theta - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6} \pi$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{7}{12} \pi$$

のとき最小値1をとる。

(2)

「 $a, b, 6$ が三角形の3辺の長さとなる」

$$\Leftrightarrow \text{「}|a-b| < 6 \text{ かつ } 6 < a+b \text{」}$$

である。 a, b は1から6までの整数をとり、 $|a-b| < 6$ は常に満たされるから、

$$6 < a+b \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を満たす a, b の組を考える。サイコロを2回ずつ投げるときの a, b の総数は 6^2 通りであり、 a, b の出方を (a, b) と表現して、条件①を満たさない (a, b) は以下のように数え上げられる。

$$\begin{aligned} &(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), \\ &(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), \\ &(1, 3), (2, 2), (3, 1), \\ &(1, 2), (2, 1), \\ &(1, 1) \end{aligned}$$

これより、条件①を満たさない (a, b) の総数は $5+4+3+2+1=15$ となる。したがって条件①

をみたす a, b の出方の総数は $6^2 - 15 = 21$ 通りとなり、その確率は、

$$\frac{21}{6^2} = \frac{7}{12}$$

となる。また、 (a, b) が条件①を満たすとき、その三角形が二等辺三角形であるのは $a, b, 6$

のうち同じ数が2つ以上含まれる場合であり、この出方を数え上げると以下ようになる。

$$\begin{aligned} &(4, 4), (5, 5), (6, 6), \\ &(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), \\ &(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5) \end{aligned}$$

したがって、総数は13通りであり、求める条件付き確率は、

$$\frac{13}{21}$$

となる。

(3)

曲線 C_1 は直線 $y=x$ に関して曲線 $y=\frac{2}{x+1}$ と対称な図形だから、 x と y を入れ替えて、

$$x = \frac{2}{y+1}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2}{x} - 1 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

と表される。曲線 C_2 は、直線 $y=-1$ に関して、曲線 $y=\frac{2}{x+1}$ と対称だから、曲線 C_2 上の点を

(X, Y) とすると、

$$\begin{cases} X = x \\ \frac{Y+y}{2} = -1 \end{cases}$$

と表されるので、 $y=\frac{2}{x+1}$ を代入して、

$$\begin{aligned} \frac{Y}{2} + \frac{1}{X+1} &= -1 \\ \Leftrightarrow Y &= -\frac{2}{X+1} - 2 \end{aligned}$$

と表される。つまり、曲線 C_2 は $y=-\frac{2}{x+1}-2$ となるので、これより漸近線は直線 $x=-1$ 、直

線 $y=-2$ となる。これらを曲線 C_1 の方程式①に代入すると、それぞれ交点は、

$(-1, -3), (-2, -2)$ となる。

(4)

$3x+5y=7$ から、 $3 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 = 7$ を辺々引き算すると、

$$3(x+1) + 5(y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x+1) = -5(y-2) \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

と表せ、3と5が互いに素であるから、 k を整数として、

$$x+1 = 5k$$

$$\Leftrightarrow x = 5k - 1$$

と表される。これを式①に代入すると、

$$3 \cdot 5k = -5(y-2)$$

$$\Leftrightarrow y = -3k + 2$$

となる。したがって、

$$x+y = 5k - 1 - 3k + 2$$

$$= 2k + 1$$

となり、これより、

$$100 \leq x+y \leq 200$$

$$100 \leq 2k+1 \leq 200$$

$$50 - \frac{1}{2} \leq k \leq 99 + \frac{1}{2}$$

と変形されるから、条件を満たす (x, y) の個数は整数 k の個数に一致し、 $99 - 50 + 1 = 50$ 個である。

(5)

$2x+y+2z=t$ とおき、 $\vec{r}=(x, y, z)$ 、 $\vec{n}=(2, 1, 2)$ とおくと、

$$t = \vec{n} \cdot \vec{r}$$

と表される。ここで、

$$x^2 + y^2 + z^2 = 18$$

$$\Leftrightarrow |\vec{r}|^2 = 18$$

$$\Leftrightarrow |\vec{r}| = 3\sqrt{2}$$

であり、また、

$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}$$

$$= 3$$

である。 $\vec{n}, \vec{r}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とすると、内積の定義より t は

$$t = |\vec{n}| |\vec{r}| \cos \theta$$

$$= 3 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos \theta$$

$$= 9\sqrt{2} \cos \theta$$

と表される。したがって、 t の範囲は

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -9\sqrt{2} \leq 9\sqrt{2} \cos \theta \leq 9\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow -9\sqrt{2} \leq t \leq 9\sqrt{2}$$

と表される。ここで、 t は

$$\cos \theta = -1$$

$$\Leftrightarrow \theta = \pi$$

のとき最小値 $-9\sqrt{2}$ をとる。このとき $\vec{n}, \vec{r}$ のなす角が π となるので、点 (x, y, z) は原点と点

$(2, 1, 2)$ を結んだ直線上かつ原点に関して点 $(2, 1, 2)$ の反対側に存在する。したがって実数

s ($s < 0$) を用いると、

$$\vec{r} = s \vec{n}$$

が成りたち、これを変形して

$$|\vec{r}|^2 = s^2 |\vec{n}|^2$$

$$\Leftrightarrow 18 = s^2 \cdot 9$$

$$\Leftrightarrow s^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow s = -\sqrt{2} \quad (\because s < 0)$$

を得る。従って (x, y, z) は

$$(x, y, z) = \vec{r}$$

$$= -\sqrt{2} \vec{n}$$

$$= (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$$

となる。