

【I】

(1)

m を整数として $\frac{m}{p}$ を考える。これが 0 より大きく 1 より小さいとき、不等式

$$0 < \frac{m}{p} < 1 \Leftrightarrow 0 < m < p$$

が成り立つ。この不等式を満たす整数 m は $m=1, 2, \dots, p-1$ の $p-1$ 個である。逆にこのとき

p が素数であるから $m=1, 2, \dots, p-1$ と p は互いに素であり、 $\frac{m}{p}$ は既約分数となって条件を

満たす。

(答) $p-1$ 個

(2)

l を整数として $\frac{l}{p}$ を考える。これが $k-1$ より大きく k より小さいとき、

$$k-1 < \frac{l}{p} < k \Leftrightarrow p(k-1) < l < pk$$

となり、この不等式を満たす l は

$$l = p(k-1) + i \quad (i=1, 2, \dots, p-1)$$

と表せる。逆にこの時 l は p で割り切れず、 p は素数より l と p は互いに素であるから $\frac{l}{p}$ は既

約分数である。したがって上の l はすべて条件を満たすので、 S_k は

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{i=1}^{p-1} \frac{l}{p} \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} \left(k-1 + \frac{i}{p} \right) \\ &= (p-1)(k-1) + \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{2} \cdot (p-1) \cdot p \\ &= \frac{1}{2}(p-1)(2k-1) \end{aligned}$$

と計算される。

(答) $S_k = \frac{1}{2}(p-1)(2k-1)$

(3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n S_k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}(p-1)(2k-1) \\ &= \frac{1}{2}(p-1) \left\{ 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - n \right\} \\ &= \frac{p-1}{2}n^2 \end{aligned}$$

と計算される。

(答) $\frac{p-1}{2}n^2$

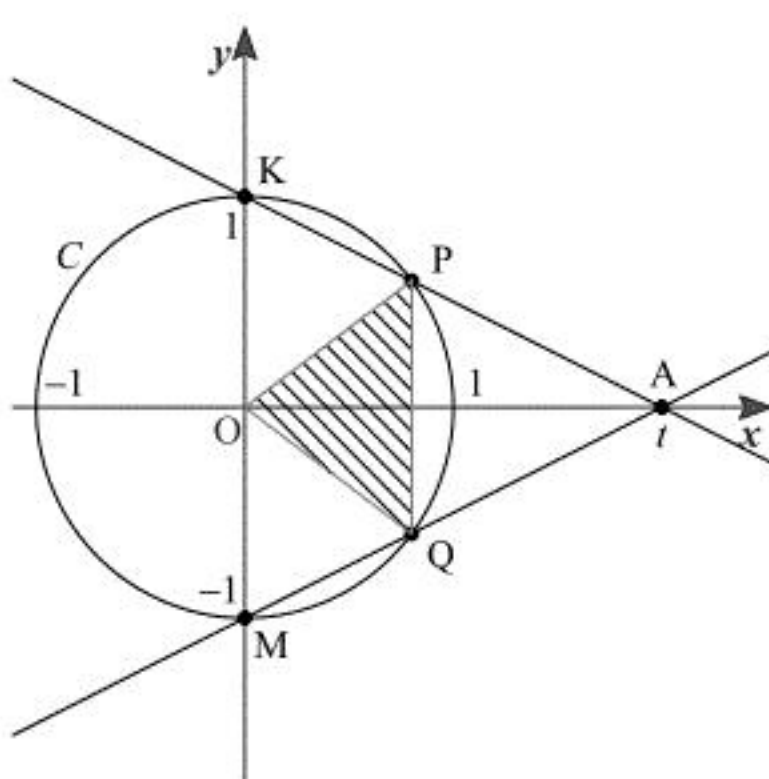
〔Ⅱ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥
$\frac{2t}{t^2+1}$	$\frac{t^2-1}{t^2+1}$	$\frac{2(t^2-1)}{t^2+1}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$

〔解説〕

(1)



図より直線 AK の傾きは $\frac{0-1}{t-0} = -\frac{1}{t}$ とわかるから、方程式は

$$\begin{aligned} y-1 &= -\frac{1}{t}(x-0) \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{1}{t}x+1 \end{aligned}$$

と表される。これを y を消去して曲線 C の方程式 $x^2+y^2=1$ と連立すると

$$\begin{aligned} x^2 + \left(-\frac{1}{t}x+1\right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{x^2}{t^2} - \frac{2x}{t} &= 0 \\ \Leftrightarrow x\left\{(t^2+1)x-2t\right\} &= 0 \\ \therefore x &= 0, \frac{2t}{t^2+1} \end{aligned}$$

となり、点 P は点 K と異なることから点 P の x 座標は $\frac{2t}{t^2+1}$ となる。これを直線 AK の式

$y = -\frac{1}{t}x+1$ に代入すると

$$y = -\frac{1}{t} \cdot \frac{2t}{t^2+1} + 1 = \frac{t^2-1}{t^2+1}$$

となるから、点 P の y 座標は $\frac{t^2-1}{t^2+1}$ である。また、図より点 Q は x 軸に関して点 P に対称だ

から、その座標は $\left(\frac{2t}{t^2+1}, -\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$ となる。これより、線分 PQ の長さは $\frac{2(t^2-1)}{t^2+1}$ となる。こ

こで S は図の斜線部の面積であるから、図より S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{t^2+1} \cdot \frac{2(t^2-1)}{t^2+1} \\ &= \frac{2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2} \end{aligned}$$

と表される。 t を $t = \tan \theta \left(\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ とおいて置換すると、 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{2 \tan \theta (\tan^2 \theta - 1)}{(\tan^2 \theta + 1)^2} \\ &= \frac{2 \tan \theta (\tan^2 \theta - 1)}{\left(\frac{1}{\cos^2 \theta}\right)^2} \left(\because \tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) \\ &= 2 \sin \theta \cos \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \\ &= -\sin 2\theta \cos 2\theta \left(\because \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = -\cos 2\theta \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sin 4\theta \left(\because \sin 2\theta \cos 2\theta = \sin 4\theta \right) \end{aligned}$$

と計算される。ここで 4θ の範囲は

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi < 4\theta < 2\pi$$

であるから S は $4\theta = \frac{3}{2}\pi$ つまり $\theta = \frac{3}{8}\pi$ で最大値をとり、その値は

$$S = -\frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2}$$

である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
$1-p$	q	$1-r$	p	$-p(1-p)+(1-r)+q$	$\sqrt{(1-p)^2+1+q^2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}(p^2-p+1)$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$

〔解説〕

点 P は辺 AB を $p:(1-p)$ に内分する点より $\overrightarrow{AP}=p\overrightarrow{AB}$ と表せる。また、点 Q は辺 CG を $q:(1-q)$ に内分する点より $\overrightarrow{CQ}=q\overrightarrow{CG}$ と表せるから、 $\overrightarrow{PQ}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} \\ &= \overrightarrow{CQ} - \overrightarrow{CA} - p\overrightarrow{AB} \\ &= q\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - p\overrightarrow{AB} \\ &= (1-p)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + q\overrightarrow{CG}\end{aligned}$$

と表される。同様に点 R は辺 HE を $r:(1-r)$ に内分する点より $\overrightarrow{HR}=r\overrightarrow{HE}$ と表せるから、 $\overrightarrow{RP}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RP} &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AR} \\ &= p\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{HR} + \overrightarrow{HA} \\ &= p\overrightarrow{AB} - r\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EA} \\ &= (1-r)\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EA} + p\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

と表される。ここで、 $\overrightarrow{HE}=-\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{CG}$ であるから、 $\overrightarrow{RP}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RP} &= p\overrightarrow{AB} + (r-1)\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CG} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{PR} &= -p\overrightarrow{AB} + (1-r)\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}\end{aligned}$$

と書き換えられる。立体 ABCD-EFGH は 1 辺の長さが 1 の立方体であるから、 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CG}$ のうち異なるベクトル同士の内積は 0 になり、各ベクトルの長さは 1 となる。このことから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} &= \{(1-p)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + q\overrightarrow{CG}\} \cdot \{-p\overrightarrow{AB} + (1-r)\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}\} \\ &= -p(1-p)|\overrightarrow{AB}|^2 + (1-r)|\overrightarrow{BC}|^2 + q|\overrightarrow{CG}|^2 \quad (\because \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{AB} = 0) \\ &= -p(1-p) + (1-r) + q \\ &= p^2 - p + q - r + 1\end{aligned}$$

と計算される。同様にして

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}|^2 &= |(1-p)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + q\overrightarrow{CG}|^2 \\ &= (1-p)^2 + 1 + q^2 \quad (\because \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CG}| = 1) \\ &= p^2 - 2p + q^2 + 2\end{aligned}$$

となり、 $|\overrightarrow{PQ}| > 0$ より、 $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(1-p)^2 + 1 + q^2}$ である。さらに

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PR}|^2 &= |-p\overrightarrow{AB} + (1-r)\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}|^2 \\ &= p^2 + (1-r)^2 + 1 \quad (\because \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CG}| = 1) \\ &= p^2 + r^2 - 2r + 2\end{aligned}$$

となる。ここで $p=q=r$ のとき

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = p^2 - p + 1$$

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = 2(p^2 - p + 1)$$

$$|\overrightarrow{PR}|^2 = 2(p^2 - p + 1)$$

となるから、 $\triangle PQR$ の面積は p を用いて

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2 |\overrightarrow{PR}|^2 - (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR})^2} &= \frac{1}{2}\sqrt{2^2(p^2 - p + 1)^2 - (p^2 - p + 1)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{3(p^2 - p + 1)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(p^2 - p + 1) \left(\because p^2 - p + 1 = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \right)\end{aligned}$$

と計算される。 $p^2 - p + 1 = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ であるから、 $0 < p < 1$ より $\triangle PQR$ の面積は $p = \frac{1}{2}$ で

最小値 $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ をとる。