

【I】

(1)

$PR:RQ=p:q$ より $\overrightarrow{PR}=\frac{p}{p+q}\overrightarrow{PQ}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} \\ &= \overrightarrow{OP} + \frac{p}{p+q}\overrightarrow{PQ} \\ &= \overrightarrow{OP} + \frac{p}{p+q}(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) \\ &= \frac{1}{p+q}(q\overrightarrow{OP} + p\overrightarrow{OQ})\end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

$\angle A$ について内角の二等分線の公式より

$$\begin{aligned}BP:PC &= AB:AC \\ &= |\overline{AB}|:|\overline{AC}|\end{aligned}$$

が成り立つ。よって点 P は辺 BC を $|\overline{AB}|:|\overline{AC}|$ に内分する点である。 $|\overline{AB}|>0, |\overline{AC}|>0$ で、また

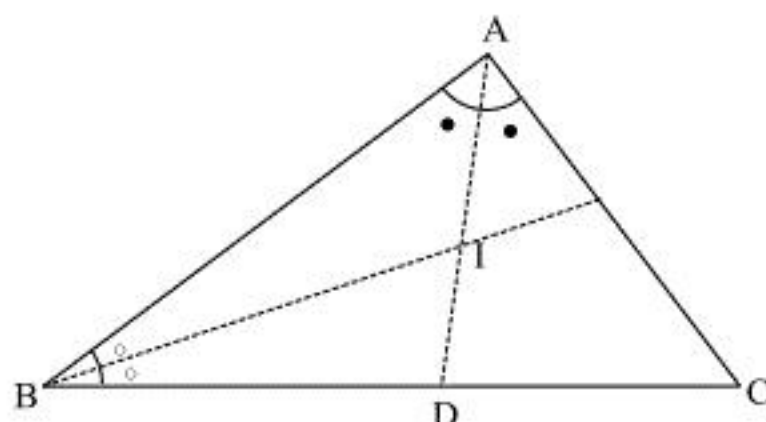
点 A は直線 BC 上にない点であるから、(1)より

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{|\overline{AB}|+|\overline{AC}|}(|\overline{AC}|\overline{AB}+|\overline{AB}|\overline{AC})$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)



$\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を点 D とすると、(2)より

$$\begin{aligned}\overline{AD} &= \frac{1}{b+c}(b\overline{AB}+c\overline{AC}) \\ BD &= \frac{ac}{b+c}\end{aligned}$$

となる。また $\angle B$ について内角の二等分線の公式より

$$\begin{aligned}AI:ID &= AB:BD \\ &= c:\frac{ca}{b+c} \\ &= (b+c):a\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overline{AI} &= \frac{b+c}{a+b+c}\overline{AD} \\ &= \frac{1}{a+b+c}(b\overline{AB}+c\overline{AC}) \\ \overline{OI} &= \overline{OA} + \frac{1}{a+b+c}\{b(\overline{OB}-\overline{OA})+c(\overline{OC}-\overline{OA})\} \\ &= \frac{1}{a+b+c}(a\overline{OA}+b\overline{OB}+c\overline{OC})\end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(4)

三角形 OAB の 3 辺の長さはそれぞれ

$$\begin{aligned}OA &= \sqrt{3^2+4^2}=5 \\ OB &= \sqrt{1^2+7^2}=5\sqrt{2} \\ AB &= \sqrt{4^2+3^2}=5\end{aligned}$$

であるから、点 I の座標を (x, y) とすると(3)より

$$\begin{aligned}x &= \frac{5 \cdot 2 + 5\sqrt{2} \cdot 5 + 5 \cdot 1}{5+5+5\sqrt{2}} \\ &= \frac{-4+7\sqrt{2}}{2} \\ y &= \frac{5 \cdot (-3) + 5\sqrt{2} \cdot 1 + 5 \cdot 4}{5+5+5\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

となり、内心 I の座標は $\left(\frac{-4+7\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ である。

(答) $I\left(\frac{-4+7\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

【Ⅱ】

(1)

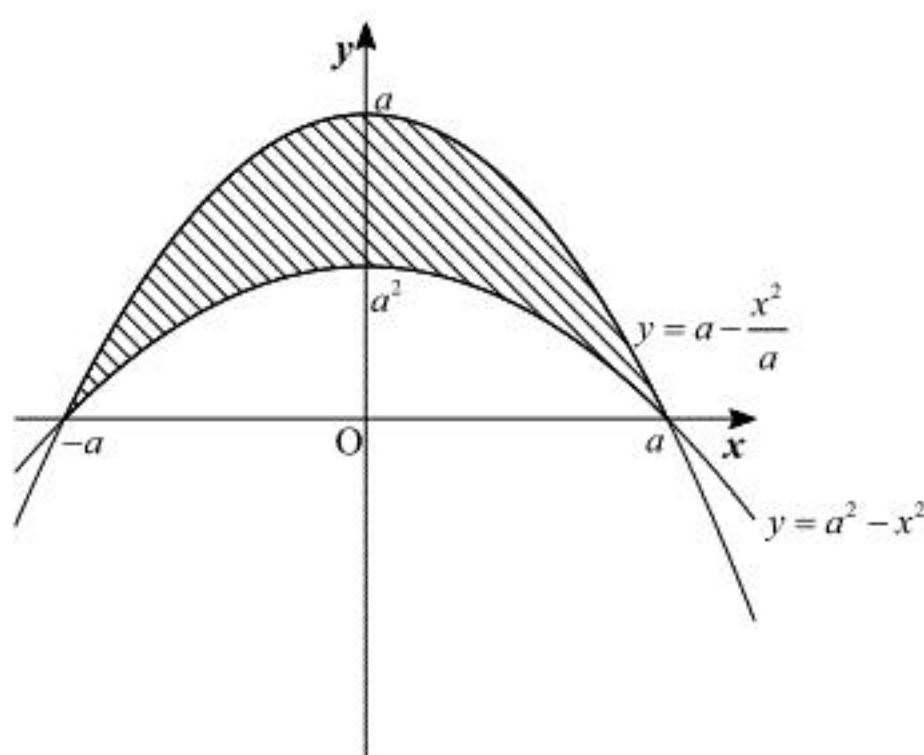
2つの放物線 $y = a - \frac{x^2}{a}$, $y = a^2 - x^2$ ($a > 0, a \neq 1$) の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} a - \frac{x^2}{a} &= a^2 - x^2 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{a-1}{a}\right)x^2 &= a^2 - a \\ \Leftrightarrow x^2 &= a^2 \quad (\because a-1 \neq 0) \\ \Leftrightarrow x &= \pm a \end{aligned}$$

より $x = a, -a$ と求まる。

[1] $0 < a < 1$ のとき

$a^2 < a$ より, $y = a - \frac{x^2}{a}$, $y = a^2 - x^2$ のグラフは以下のようになり, 2つの放物線に囲まれる領域は, 斜線部である。



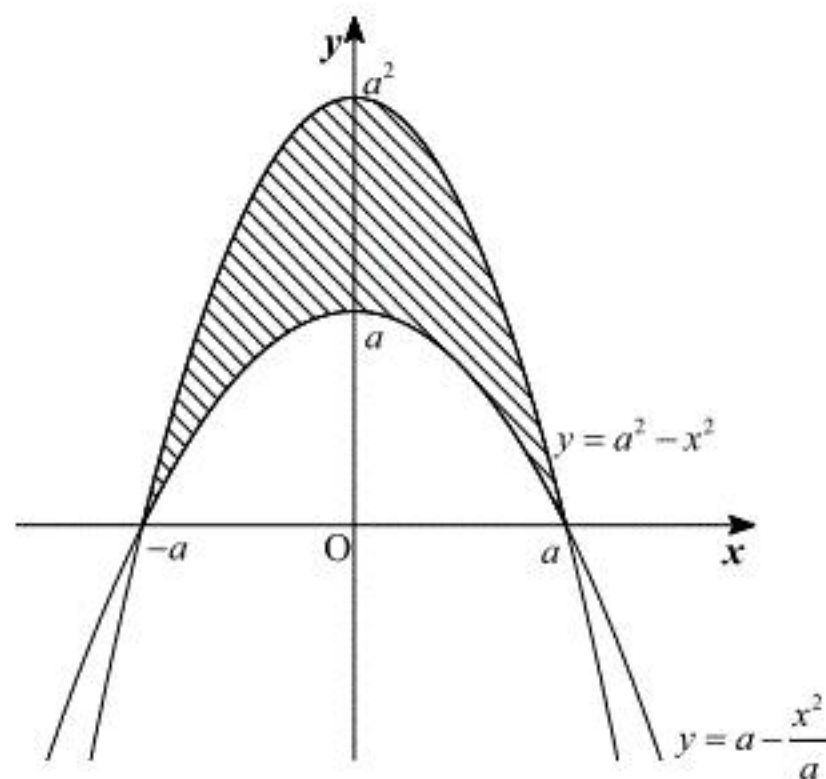
よって, 求める面積 $S(a)$ は

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{-a}^a \left\{ \left(a - \frac{x^2}{a}\right) - (a^2 - x^2) \right\} dx \\ &= \frac{a-1}{a} \int_{-a}^a (x-a)(x+a) dx \\ &= \frac{1-a}{a} \cdot \frac{\{a - (-a)\}^3}{6} \\ &= \frac{4}{3} a^2 (1-a) \end{aligned}$$

となる。

[2] $a > 1$ のとき

$a < a^2$ より, $y = a - \frac{x^2}{a}$, $y = a^2 - x^2$ のグラフは以下のようになり, 2つの放物線に囲まれる領域は, 斜線部である。



よって, 求める面積 $S(a)$ は

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{-a}^a \left\{ (a^2 - x^2) - \left(a - \frac{x^2}{a}\right) \right\} dx \\ &= \frac{1-a}{a} \int_{-a}^a (x-a)(x+a) dx \\ &= \frac{a-1}{a} \cdot \frac{\{a - (-a)\}^3}{6} \\ &= \frac{4}{3} a^2 (a-1) \end{aligned}$$

となる。

以上をまとめて, $S(a) = \frac{4}{3} a^2 |a-1|$ と求まる。

(答) $S(a) = \frac{4}{3} a^2 |a-1|$

(2)

$0 < a < 1$ のとき

$$\begin{aligned} S(a) &= -\frac{4}{3} a^3 + \frac{4}{3} a^2 \\ S'(a) &= -4a^2 + \frac{8}{3} a \\ &= -4a \left(a - \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

であり, $S'(a) = 0$ となるのは $a = \frac{2}{3}$ のときである。よって増減表は下図のようになる。

a	(0)	...	$\frac{2}{3}$	...	(1)
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		↗	極大	↘	

これから, $S(a)$ は $a = \frac{2}{3}$ のとき極大かつ最大となり, そのときの $S(a)$ の値は $S\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81}$ である。

(答) $a = \frac{2}{3}$ のとき $S(a)$ は最大値 $\frac{16}{81}$ をとる。

【Ⅲ】

【解答】

(1)	①	
	11100	
(2)	②	
	32	
(3)	③	④
	$7 \cdot 2^{n-3}$	$2^{n-1} + 3$
(4)	⑤	⑥
	$\frac{1}{2}n(n+1)$	6

【解説】

(1)

$$28 = 2^4 \cdot 1 + 2^3 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1$$

であるから、28を2進法であらわすと11100となる。

(2)

3^{20} が2進法で n 桁(n は自然数)であるとする、 $2^{n-1} \leq 3^{20} < 2^n$ となる。各辺の底が10である対数をとると、 $10 > 1$ であるから

$$\begin{aligned} \log_{10} 2^{n-1} &\leq \log_{10} 3^{20} < \log_{10} 2^n \\ \Leftrightarrow (n-1)\log_{10} 2 &\leq 20\log_{10} 3 < n\log_{10} 2 \\ \Leftrightarrow 20 \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} < n &\leq 20 \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} + 1 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ を代入して

$$20 \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} = 31.70\dots, \quad 20 \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} + 1 = 32.70\dots$$

であるから、①を満たす自然数 n は $n = 32$ であり、32桁となる。

(3)

最大のものは上から3つの位が1、それ以外の位が0となるから、これを10進法であらわすと

$$1 \cdot 2^{n-1} + 1 \cdot 2^{n-2} + 1 \cdot 2^{n-3} = 7 \cdot 2^{n-3}$$

となる。最小のものは最も上の位と下から2つの位が1、それ以外の位が0となるから、これを10進法であらわすと

$$2^{n-1} + 2 + 1 = 2^{n-1} + 3$$

となる。

(4)

桁数は1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, ... と増えていき、 n 番目の数 a_n の桁数は1から n までの自然数の和であるから

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

と求まる。そして桁数から、 a_n は10進法で

$$2^{\frac{n(n+1)}{2}} < a_n < 2^{\frac{n(n+1)}{2} + 1} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また、 $2^m > 10^6$ (m は自然数)として両辺の底が10となる対数をとると、 $10 > 1$ であるから

$$\begin{aligned} \log_{10} 2^m &> \log_{10} 10^6 \\ \Leftrightarrow m\log_{10} 2 &> 6 \\ \Leftrightarrow m &> \frac{6}{\log_{10} 2} = 19.9\dots \\ \Leftrightarrow m &\geq 20 \end{aligned}$$

となる。①より $2^{15} < a_5 < 2^{16}$, $2^{21} < a_6 < 2^{22}$ であるから、 a_n が10進法の1000000を超える最小の n は6と求まる。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

(1)	①	
	$\frac{3x+5y}{64}$	
(2)	②	
	4	
(3)	③	④
	6	6
(4)	⑤	⑥
	1	$\frac{75}{224}$

〔解説〕

(1)

A が勝つのは A, B ともに赤または青の球を取り出したときであるから

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{x}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{y}{8} = \frac{3x+5y}{64}$$

と求まる。

(2)

$x+y=8$ より

$$\begin{aligned} \frac{3x+5y}{64} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{40-2x}{64} &= \frac{1}{2} \\ \therefore x &= 4 \end{aligned}$$

となる。

(3)

$$\begin{aligned} \frac{40-2x}{64} &\geq \frac{7}{16} \\ \Leftrightarrow x &\leq 6 \end{aligned}$$

より条件を満たす (x, y) の組は $(6, 2), (5, 3), (4, 4), (3, 5), (2, 6), (1, 7)$ の 6 通りあり、このうち x の値が最大となる組は $(6, 2)$ である。

(4)

A が 2 回続けて勝つのは、1, 2 回目で取り出された球が赤 2 個、青 2 個か、青 2 個、赤 2 個か、赤 2 個、赤 2 個か、青 2 個、青 2 個となる 4 通りのいずれかである。その確率は

$$\begin{aligned} &\frac{3}{8} \cdot \frac{x}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{8-x}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{8-x}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{x}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{x-1}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{8-x}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{7-x}{7} \\ &= \frac{-4x^2 - 66x + 1120}{8^2 \cdot 7^2} \end{aligned}$$

となる。分子の x の 2 次式について

$$-4x^2 - 66x + 1120 = -4 \left(x + \frac{33}{4} \right)^2 + \frac{5569}{4}$$

より $1 \leq x \leq 7$ の範囲で単調減少するから、確率が最大になるのは $x=1$ のときでその値は

$$\frac{75}{224}$$

である。