

〔Ⅰ〕

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2+a)(x^2+3)-(x^3+ax) \cdot 2x}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{x^4+(9-a)x^2+3a}{(x^2+3)^2} \end{aligned}$$

より、 $f(x)$ が $x=1$ で極値を持つためには

$$\begin{aligned} f'(1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1^4+(9-a) \cdot 1^2+3a &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= -5 \end{aligned}$$

が必要である。逆に、 $a=-5$ のときは

$$f'(x) = \frac{x^4+14x^2-15}{(x^2+3)^2} = \frac{(x^2+15)(x-1)(x+1)}{(x^2+3)^2}$$

となり、 $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

増減表より、このとき $f(x)$ は確かに $x=1$ で極値をもつため、 $a=-5$ は十分である。以上より、 $a=-5$ が答えとなる。

(答) $a=-5$

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - x\} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3-5x}{x^2+3} - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-8x}{x^2+3} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{8}{x}}{1+\frac{3}{x^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。

(答) 0

(3)

(1)で示した増減表より、 $f(x)$ の極大値は

$$f(-1) = \frac{(-1)^3-5 \cdot (-1)}{(-1)^2+3} = 1$$

であり、極小値は

$$f(1) = \frac{1^3-5 \cdot 1}{1^2+3} = -1$$

である。よって改めて $f(x)$ の増減表を描くと、以下のようになる。

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	-1	↗

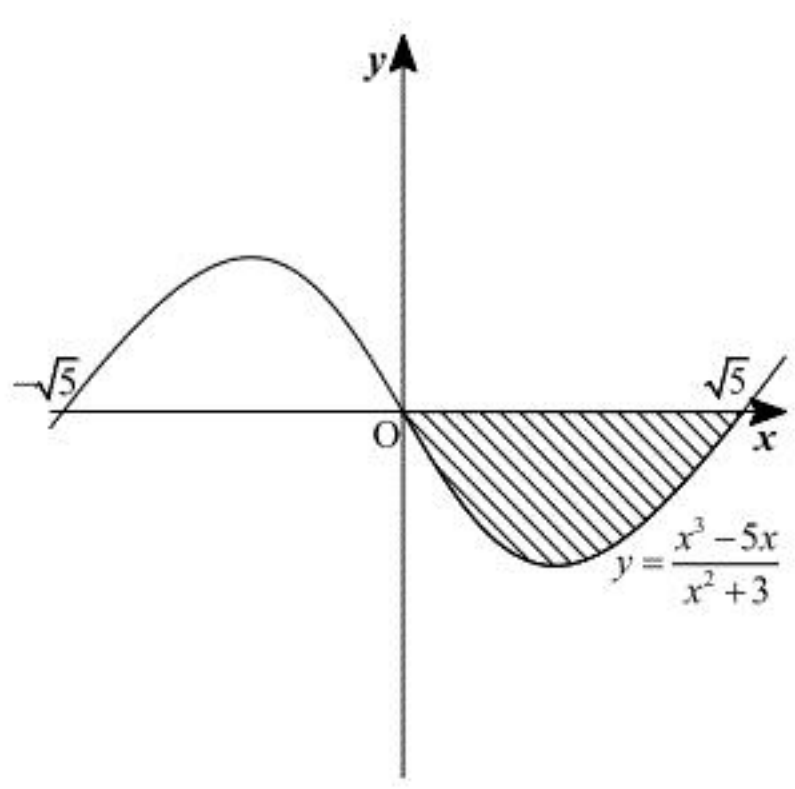
(答) 極大値：1，極小値：-1，増減表：前表

(4)

曲線 C と x 軸の交点は

$$\begin{aligned} \frac{x^3-5x}{x^2+3} &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, \pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

であるから、 C を図示すると下図を得る。ここで、 C と x 軸の $x \geq 0$ の部分で囲まれる図形は次図の斜線部のようになる。



よって求める面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{5}} \left(0 - \frac{x^3-5x}{x^2+3} \right) dx &= \int_0^{\sqrt{5}} \left(-x + \frac{8x}{x^2+3} \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 4\log(x^2+3) \right]_0^{\sqrt{5}} \\ &= 4\log\frac{8}{3} - \frac{5}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $4\log\frac{8}{3} - \frac{5}{2}$

【Ⅱ】

〔解答〕

(1)	①	
	$\frac{1}{3}$	
(2)	②	③
	2	$4n^2+12n+11$
(3)	④	
	$\frac{10}{63}$	
(4)	⑤	⑥
	$\frac{1}{4}$	$\frac{746}{63}$

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}a_1-a_2&=2\cdot a_1\cdot a_2\\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}-a_2&=2\cdot \frac{1}{3}\cdot a_2\\ \Leftrightarrow a_2&=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

であるから、

$$b_1=5\cdot \frac{1}{3}\cdot \frac{1}{5}=\frac{1}{3}$$

となる。

(2)

まず、全ての自然数 n に対して $a_n\neq 0$ であることを、背理法を用いて証明する。いま、 $a_n=0$ となるような自然数 $n=k$ ($k\geq 2$)が存在すると仮定すると、 $a_k=0$ より

$$\begin{aligned}a_{k-1}-a_k&=2a_{k-1}a_k\\ \Leftrightarrow a_{k-1}-0&=2a_{k-1}\cdot 0\\ \Leftrightarrow a_{k-1}&=0\end{aligned}$$

が得られ、同様の計算を繰り返すことで

$$a_{k-2}=a_{k-3}=a_{k-4}=\cdots=a_1=0$$

となる。しかしこれは $a_1=\frac{1}{3}$ に矛盾するため、仮定は誤りである。以上より、 $a_n\neq 0$ であるこ

とがわかる。このことから

$$a_n-a_{n+1}=2a_na_{n+1}$$

の両辺を $a_na_{n+1}(\neq 0)$ で割ることができ、

$$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2\Leftrightarrow c_{n+1}=c_n+2$$

が得られる。よって数列 $\{c_n\}$ は初項 $c_1=\frac{1}{a_1}=3$ 、公差 2 の等差数列であるから、

$$\begin{aligned}c_n&=3+(n-1)\cdot 2\\ &=2n+1\end{aligned}$$

とわかる。以上より

$$\begin{aligned}S&=\sum_{k=1}^nc_k^2\\ &=\sum_{k=1}^n(2k+1)^2\\ &=\sum_{k=1}^n(4k^2+4k+1)\\ &=4\cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+4\cdot \frac{1}{2}n(n+1)+1\cdot n\\ &=\frac{n}{3}\{2(n+1)(2n+1)+6(n+1)+3\}\\ &=\frac{n}{3}(4n^2+12n+11)\end{aligned}$$

と計算できる。

(3)

(2)より $a_n=\frac{1}{c_n}=\frac{1}{2n+1}$ とわかるから、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{30}a_ka_{k+1}&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{30}(a_k-a_{k+1})\\ &=\frac{1}{2}(a_1-a_2+a_2-a_3+\cdots+a_{30}-a_{31})\\ &=\frac{1}{2}(a_1-a_{31})\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{63}\right)\\ &=\frac{10}{63}\end{aligned}$$

となる。

(4)

$2a_na_{n+1}=a_n-a_{n+1}$ の両辺に a_{n+2} を掛けると、

$$2a_na_{n+1}a_{n+2}=a_na_{n+2}-a_{n+1}a_{n+2}\hspace{10em}\cdots\cdots\textcircled{1}$$

となる。また、 $2a_{n+1}a_{n+2}=a_{n+1}-a_{n+2}$ の両辺に a_n を掛けると、

$$2a_na_{n+1}a_{n+2}=a_na_{n+1}-a_na_{n+2}\hspace{10em}\cdots\cdots\textcircled{2}$$

となる。①、②の両辺を足し合わせることによって

$$\begin{aligned}4a_na_{n+1}a_{n+2}&=a_na_{n+1}-a_{n+1}a_{n+2}\\ \Leftrightarrow a_na_{n+1}a_{n+2}&=\frac{1}{4}(a_na_{n+1}-a_{n+1}a_{n+2})\end{aligned}$$

が得られる。これを利用すると

$$\begin{aligned}b_{n+1}-b_n&=4a_na_{n+1}a_{n+2}\\ \Leftrightarrow b_{n+1}&=b_n+(a_na_{n+1}-a_{n+1}a_{n+2})\end{aligned}$$

となるから、 $n\geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}b_n&=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_ka_{k+1}-a_{k+1}a_{k+2})\\ &=\frac{1}{3}+(a_1a_2-a_2a_3+a_2a_3-a_3a_4+\cdots+a_{n-1}a_n-a_na_{n+1})\\ &=\frac{1}{3}+a_1a_2-a_na_{n+1}\\ &=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot \frac{1}{5}-a_na_{n+1}\\ &=\frac{2}{5}-a_na_{n+1}\end{aligned}$$

と計算できる。この式に $n=1$ を代入したものは $b_1=\frac{1}{3}$ に一致するから、 $n=1,2,3,\cdots$ に対して

$$b_n=\frac{2}{5}-a_na_{n+1}$$

と言える。以上より、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{30}b_k&=\sum_{k=1}^{30}\left(\frac{2}{5}-a_ka_{k+1}\right)\\ &=\frac{2}{5}\cdot 30-\sum_{k=1}^{30}a_ka_{k+1}\\ &=12-\frac{10}{63}(\because (3))\\ &=\frac{746}{63}\end{aligned}$$

となる。

【Ⅲ】

【解答】

(1)	①	
	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}$	
(2)	②	
	$\sqrt{5}$	
(3)	③	
	$-\frac{5}{2}<k<\frac{5}{2}$	
(4)	④	
	$\frac{x^2}{4}-y^2$	
(5)	⑤	⑥
	$\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$	
		45

【解説】

(1)

C の方程式を $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1\left(a>0, b>0\right)$ とおくと、 C が 2 点 $(-3, 0),\left(\sqrt{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ を通ることよ

り

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{(-3)^2}{a}+\frac{0^2}{b}=1 \\ \frac{(\sqrt{3})^2}{a}+\frac{\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2}{b}=1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{a}=1 \\ \frac{3}{a}+\frac{8}{3b}=1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow (a, b)=(9, 4) \end{aligned}$$

が得られる。よって C の方程式は $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ である。

(2)

楕円 $C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ の焦点の座標は $(\pm\sqrt{9-4}, 0)=(\pm\sqrt{5}, 0)$ であるから、 $p=\sqrt{5}$ とわかる。

(3)

$C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ と直線 $y=\frac{1}{2}x+k$ が異なる 2 つの共有点をもつとき、これらの 2 式から y を消

去して得られる 2 次方程式

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{9}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x+k\right)^2=1 \\ & \Leftrightarrow 25x^2+36kx+36(k^2-4)=0 \end{aligned}$$

は異なる 2 つの実数解をもつ。その条件は、

$$\begin{aligned} & (18k)^2-25\cdot 36(k^2-4)>0 \\ & \Leftrightarrow k^2-\frac{25}{4}<0 \\ & \Leftrightarrow -\frac{5}{2}<k<\frac{5}{2} \end{aligned}$$

である。

(4)

$y=\pm\frac{1}{2}x$ を漸近線にもち、2 つの焦点が x 軸上にあるような双曲線の方程式は、

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{(2c)^2}-\frac{y^2}{c^2}=1\left(c>0\right) \text{とおける。この双曲線の焦点は} \\ & \left(\pm\sqrt{(2c)^2+c^2}, 0\right)=(\pm\sqrt{5}c, 0)\left(\because c>0\right) \end{aligned}$$

であるから、これらが 2 点 $F_1(\sqrt{5}, 0), F_2(-\sqrt{5}, 0)$ と一致することより

$$\sqrt{5}c=\sqrt{5} \Leftrightarrow c=1$$

が得られる。以上より、求める双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{(2\cdot 1)^2}-\frac{y^2}{1^2}=1\Leftrightarrow \frac{x^2}{4}-y^2=1$$

となる。

(5)

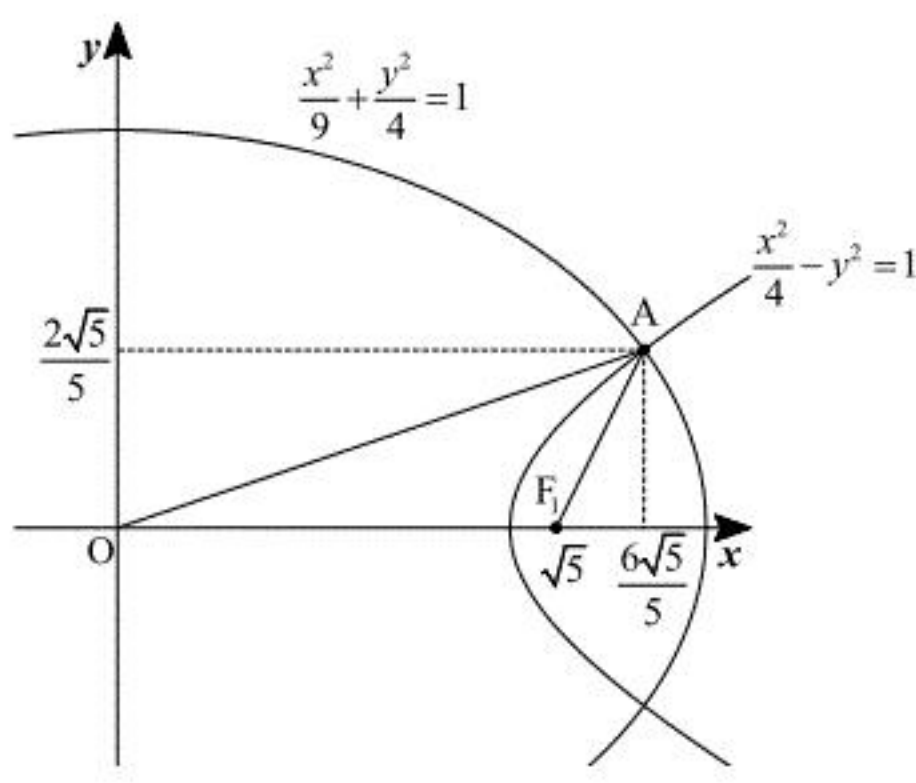
楕円 $C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ と双曲線 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ の交点である A の x 座標は、

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{9}+\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{4}-1\right)=1 \\ & \Leftrightarrow x^2=\frac{36}{5} \\ & \therefore x=\frac{6\sqrt{5}}{5}\left(\because A \text{ は第 1 象限の点より } x>0\right) \end{aligned}$$

と求められる。 y 座標は、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2-y^2=1 \\ & \Leftrightarrow y^2=\frac{4}{5} \\ & \therefore y=\frac{2\sqrt{5}}{5}\left(\because A \text{ は第 1 象限の点より } y>0\right) \end{aligned}$$

である。したがって A の座標は $\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ である。



ここで、

$$\begin{aligned} OA &= \sqrt{\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=2\sqrt{2} \\ OF_1 &= \sqrt{5} \\ AF_1 &= \sqrt{\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}-1\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=1 \end{aligned}$$

であるから、 $\triangle OAF_1$ に余弦定理を用いることで、

$$\begin{aligned} \cos\angle OAF_1 &= \frac{OA^2+AF_1^2-OF_1^2}{2\cdot OA\cdot AF_1} \\ &= \frac{(2\sqrt{2})^2+1^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

がわかる。三角形の内角である $\angle OAF_1$ は $0^\circ<\angle OAF_1<180^\circ$ を満たすから、

$$\angle OAF_1=45^\circ$$

と求められる。

【Ⅳ】

【解答】

(1)	①	
	$\frac{105}{512}$	
(2)	②	
	$\frac{\sqrt{3}}{3} \leq k \leq 1$	
(3)	③	④
	3	$2\sqrt{6}$
(4)	⑤	⑥
	-3	5
(5)	⑦	
	4	

【解説】

(1)

さいころを1回投げたとき、奇数の目が出る確率及び偶数の目が出る確率は共に $\frac{1}{2}$ である。い

ま、さいころを10回投げたとき、奇数の目が k 回出たとすると、Pの座標は

$$k \cdot 3 + (10 - k) \cdot (-2) = 5k - 20$$

となる。したがって、Pが原点にあるのは、

$$5k - 20 = 0 \Leftrightarrow k = 4$$

のとき、つまり10回中奇数の目が4回出るときである。よって求める確率は

$${}_{10}C_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-4} = \frac{105}{512}$$

となる。

(2)

傾きが k で、点 $(2, 0)$ を通る直線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= k(x - 2) \\ \Leftrightarrow kx - y - 2k &= 0 \end{aligned}$$

である。この直線と原点Oの距離が1以上 $\sqrt{2}$ 以下である条件は、

$$1 \leq \frac{|k \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 2k|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} \leq \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{|2k|}{\sqrt{k^2 + 1}} \leq \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{k^2 + 1} \leq |2k| \leq \sqrt{2(k^2 + 1)} \left(\because \sqrt{k^2 + 1} > 0 \right)$$

である。 $\sqrt{k^2 + 1} > 0$ より、各辺を2乗しても同値性は保たれるから、

$$k^2 + 1 \leq 4k^2 \leq 2k^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq k^2 \leq 1$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3} \leq k \leq 1 \left(\because k > 0 \right)$$

と求められる。

(3)

$$\log_x 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 x} = \frac{3}{t}$$

である。また、 $x > 1$ では $t = \log_2 x > 0$ となるから、相加平均・相乗平均の関係より

$$\begin{aligned} \log_x 8 + \log_2 x^2 &= \frac{3}{t} + 2t \\ &\geq 2\sqrt{\frac{3}{t} \cdot 2t} \\ &= 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

が得られる。この不等式の等号は $2t = \frac{3}{t} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{6}}{2} \left(\because t > 0 \right)$ のときに確かに成立するため、求

める最小値は $2\sqrt{6}$ となる。

(4)

$\overline{AB} = (0, -1, 1)$ 、 $\overline{AC} = (-1, -3, a)$ のなす角度が 90° であることより

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{AC} &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-3) + 1 \cdot a &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= -3 \end{aligned}$$

が得られる。また、点Pが平面ABC上にあるとき、

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= s\overline{AB} + t\overline{AC} \quad (s, t \text{ は実数}) \\ \Leftrightarrow (2 - 1, 3 - 2, b - 0) &= s(0, -1, 1) + t(-1, -3, a) \\ \Leftrightarrow (1, 1, b) &= (-t, -s - 3t, s - 3t) \left(\because a = -3 \right) \end{aligned}$$

と表せる。よって成分を比較することで

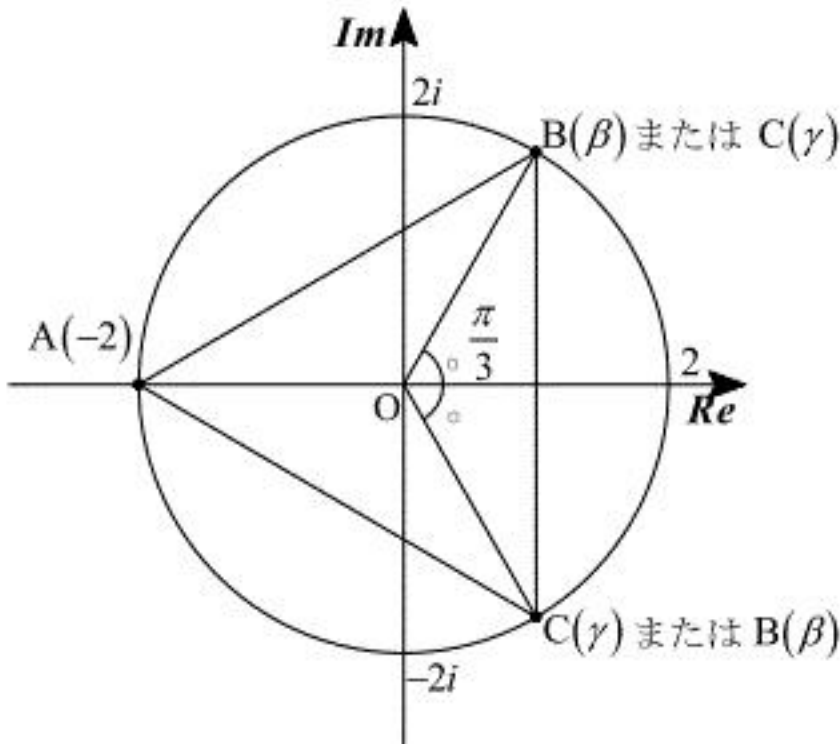
$$1 = -t \quad \text{かつ} \quad 1 = -s - 3t \quad \text{かつ} \quad b = s - 3t$$

$$\Leftrightarrow (s, t, b) = (2, -1, 5)$$

が得られる。以上より、 $b = 5$ である。

(5)

正三角形である $\triangle ABC$ の重心と外心は一致するから、A、B、Cは原点Oを中心とする同一円周上にあると分かる。その円の半径は $OA = 2$ であるから、3点 $A(-2)$ 、 $B(\beta)$ 、 $C(\gamma)$ の位置関係は下図のようになる。



図より、

$$\begin{cases} \beta = 2 \left\{ \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) \right\} = 1 \pm \sqrt{3}i \\ \gamma = 2 \left\{ \cos\left(\mp\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\mp\frac{\pi}{3}\right) \right\} = 1 \mp \sqrt{3}i \end{cases} \quad (\text{複号同順})$$

となるから、

$$\beta\gamma = (1 \pm \sqrt{3}i)(1 \mp \sqrt{3}i) = 4$$

が得られる。