

【Ⅰ】

〔解答〕

	①	②	③
(1)	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
	④	⑤	
(2)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	
	⑥	⑦	
(3)	$\frac{15}{2}x+8$	-2	

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1} - a_n \\ &= 3n \end{aligned}$$

とおくと数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列である。よって $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 3k \\ &= 2 + 3 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n \\ &= \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 2 \end{aligned}$$

となる。この式に $n=1$ を代入すると、 $a_1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + 2 = 2$ となるから $n=1$ のときも成り立つ。

以上より、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 2$$

である。

(2)

まず $f(n)$ を求めると

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{2}k^2 - \frac{3}{2}k + 2 \right) \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + 2n \\ &= \frac{1}{2}n^3 + \frac{3}{2}n \end{aligned}$$

となる。ここで $f(x) - \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x \right) = Q(x)$ とおくと、 $f(x)$ は3次関数であるから $Q(x)$ は3次以下の整式である。このとき、 $x=0, 1, 2, 3$ とすると $Q(x)=0$ が成り立つ。ゆえに、 $Q(x)$ は3次以下の整式であり、方程式 $Q(x)=0$ が4個の異なる解を持つことから、 $Q(x)=0$ は x についての恒等式である。よって、 $Q(x)=0$ は常に成り立つので

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x$$

である。

(3)

求める接線の方程式を $y=ax+b$ とすると、点 $(0, 8)$ を通るから

$$b=8$$

である。 $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x$ より $f'(x) = \frac{3}{2}(x^2+1)$ であるから、接点の x 座標を t とおくと

$$a = \frac{3}{2}(t^2+1)$$

が成り立つ。すると $x=t$ のとき、 $f(t) = \frac{3}{2}(t^2+1)t+8$ が成り立つので

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{3}{2}(t^2+1)t+8 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t &= \frac{3}{2}(t^2+1)t+8 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t &= \frac{3}{2}t^3 + \frac{3}{2}t+8 \\ \therefore t^3 &= -8 \end{aligned}$$

である。ここで t は実数であるから

$$t=-2$$

と求めることができ、接点の x 座標は -2 である。よって

$$a = \frac{3}{2}\{(-2)^2+1\} = \frac{15}{2}$$

であるから、求める接線の方程式は

$$y = \frac{15}{2}x+8$$

である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
$\sqrt{h^2+1}$	$\sqrt{h^2+2}$	$\frac{\sqrt{h^2+1}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{h^2+2}}$	$\sqrt{\frac{h^2+1}{h^2+2}}$	$\sqrt{2}$	$6+4\sqrt{3}$

〔解説〕

$\triangle BFG$ に三平方の定理を用いると

$$\begin{aligned} BG^2 &= BF^2 + FG^2 \\ \Leftrightarrow BG^2 &= h^2 + 1^2 \\ \Leftrightarrow BG &= \sqrt{h^2 + 1} \quad (\because BG > 0) \end{aligned}$$

となる。同様に $AB \perp BG$ であるから、 $\triangle ABG$ に三平方の定理を用いると

$$\begin{aligned} AG^2 &= BG^2 + AB^2 \\ \Leftrightarrow AG^2 &= \left(\sqrt{h^2 + 1}\right)^2 + 1^2 \\ \Leftrightarrow AG &= \sqrt{h^2 + 2} \quad (\because AG > 0) \end{aligned}$$

となる。また、 $\triangle ABG$ の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BG &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{h^2 + 1} \\ &= \frac{\sqrt{h^2 + 1}}{2} \end{aligned}$$

である。さらに $\angle AGB = \theta$ より

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{AB}{AG} \\ &= \frac{1}{\sqrt{h^2 + 2}} \quad \dots \textcircled{1} \\ \cos \theta &= \frac{BG}{AG} \\ &= \sqrt{\frac{h^2 + 1}{h^2 + 2}} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $\theta = 30^\circ$ のとき $\sin \theta = \frac{1}{2}$ であることから

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{h^2 + 2}} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{h^2 + 2} &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow h^2 &= 2 \\ \therefore h &= \sqrt{2} \quad (\because h > 0) \end{aligned}$$

となる。また、 $\theta = 15^\circ$ のとき半角の公式から

$$\begin{aligned} \sin^2 15^\circ &= \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} \\ &= \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

であり、これらは①の両辺を二乗したものと等しいから

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2 + 2} &= \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \\ \Leftrightarrow h^2 + 2 &= \frac{4}{2 - \sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow h^2 + 2 &= \frac{4(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} \\ \Leftrightarrow h^2 &= 6 + 4\sqrt{3} \\ \therefore h &= \sqrt{6 + 4\sqrt{3}} \quad (\because h > 0) \end{aligned}$$

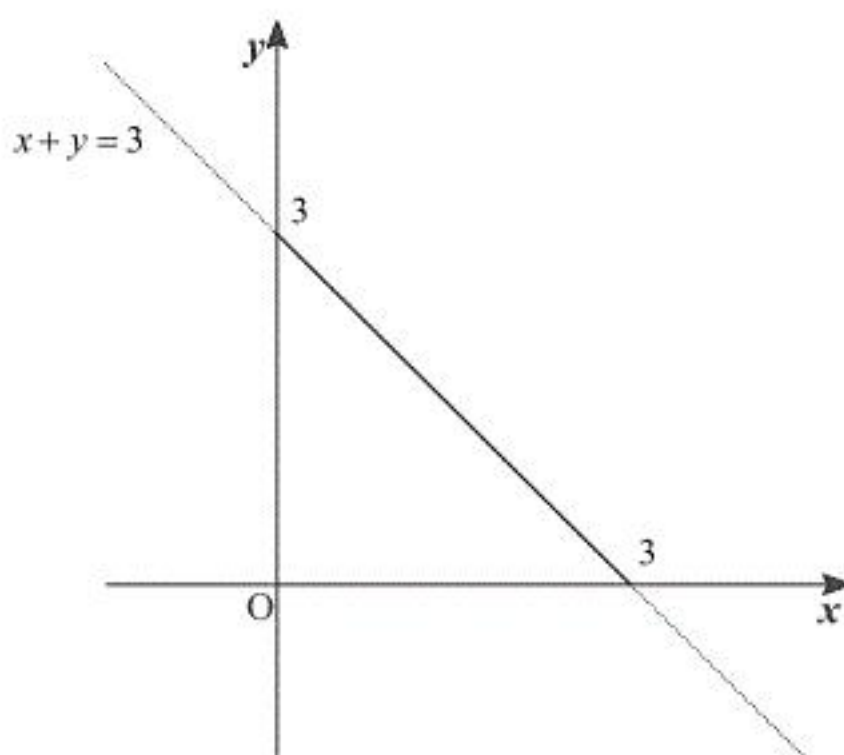
と求められる。

〔Ⅲ〕

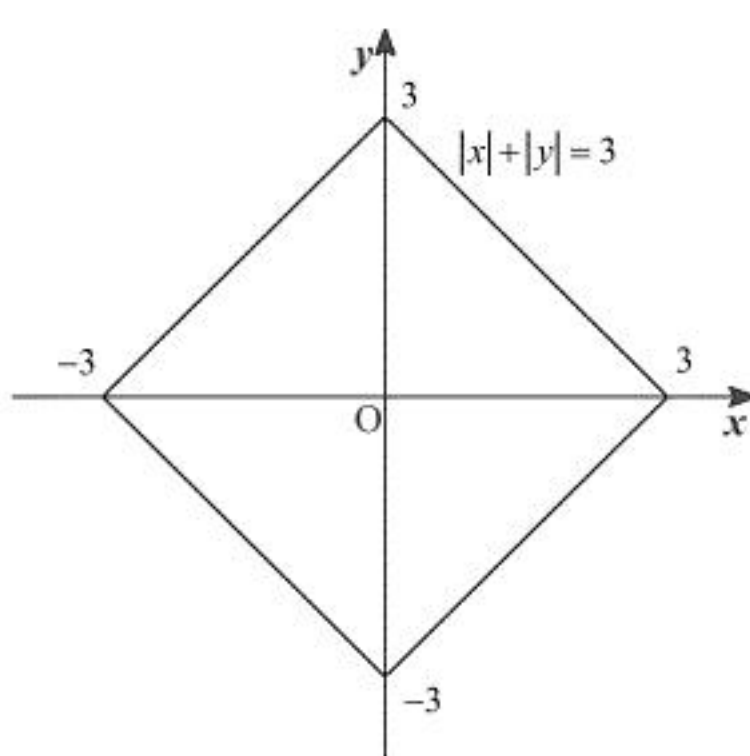
(1)

$$|x|+|y|=3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(x, y) が方程式①を満たすとき $(-x, y), (x, -y), (-x, -y)$ も①を満たすことから ①が表す図形は x 軸, y 軸, 原点に関して対称である。ゆえに, $x \geq 0, y \geq 0$ のときを考えると, ①は $x+y=3$ となり, 図形は下図の実線部分となる。



よって, ①が表す図形が x 軸, y 軸, 原点に関して対称であることから, 求める図は下図となる。

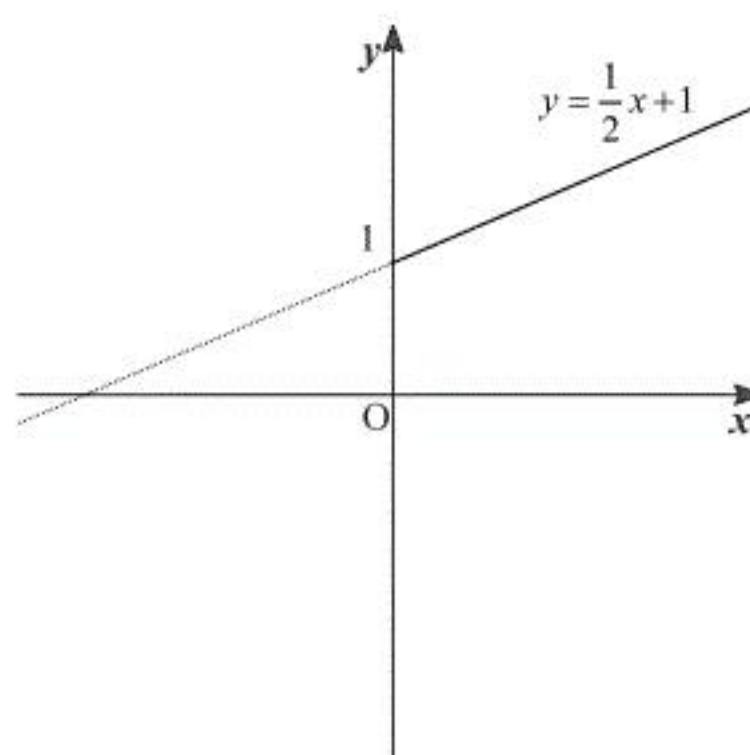


(答) 前図

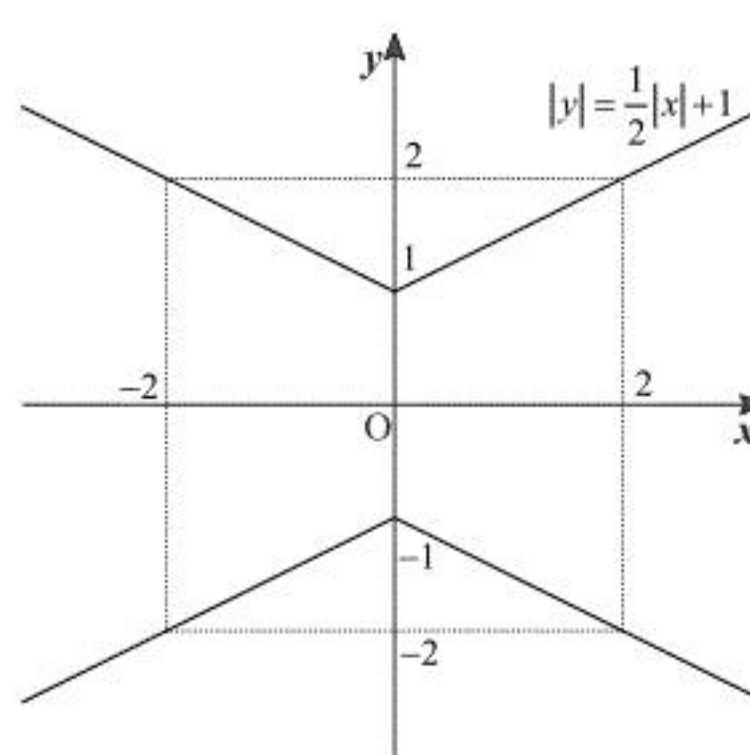
(2)

$$|y|=\frac{1}{2}|x|+1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

(x, y) が方程式②を満たすとき $(-x, y), (x, -y), (-x, -y)$ も②を満たすことから, ②が表す図形は x 軸, y 軸, 原点に関して対称である。ゆえに, $x \geq 0, y \geq 0$ のときを考えると, ②は $y=\frac{1}{2}x+1$ となり, 図形は下図の実線部分となる。



よって, ②が表す図形が x 軸, y 軸, 原点に関して対称であることから, 求める図は下図となる。



(答) 前図

(3)

$$(|x|+|y|-3)\left(|y|-\frac{1}{2}|x|-1\right)>0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

(x, y) が方程式③を満たすとき $(-x, y), (x, -y), (-x, -y)$ も③を満たすことから, ③が表す領域は x 軸, y 軸, 原点に関して対称である。ゆえに, $x \geq 0, y \geq 0$ のときを考えると

$$(x+y-3)\left(y-\frac{1}{2}x-1\right)>0$$

となる。よって

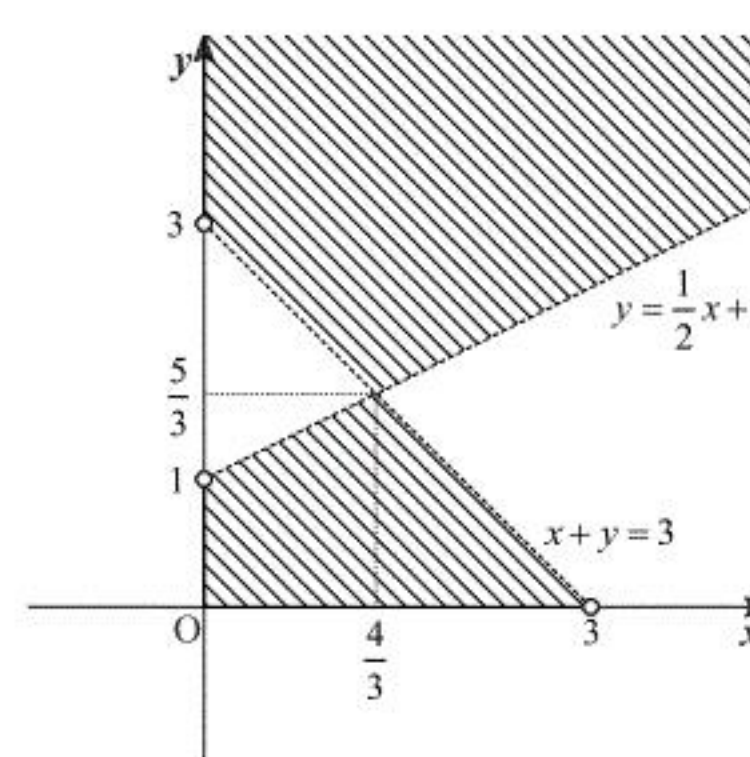
$$\begin{cases} x+y-3>0 \\ y-\frac{1}{2}x-1>0 \end{cases}$$

または

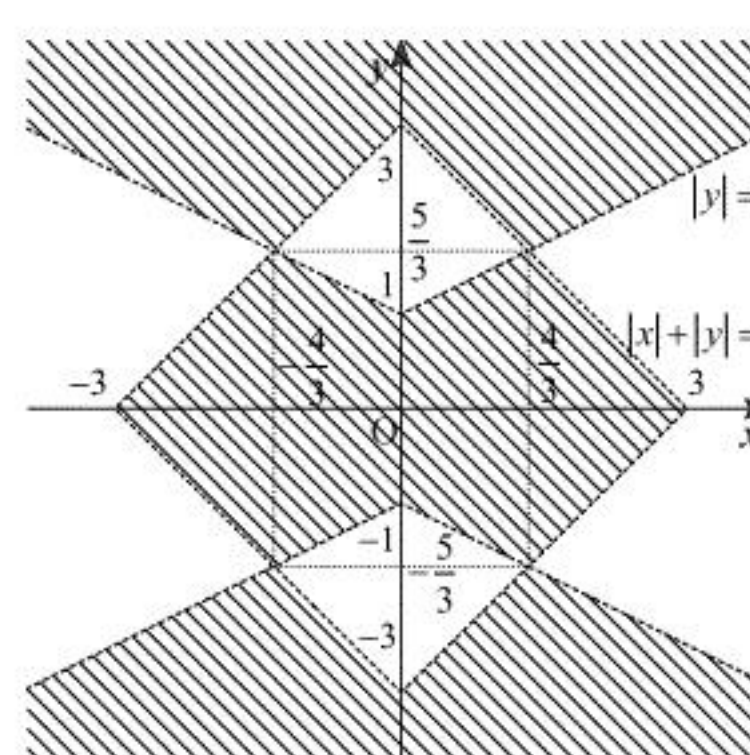
$$\begin{cases} x+y-3<0 \\ y-\frac{1}{2}x-1<0 \end{cases}$$

を満たす。 $x+y-3=0$ と $y-\frac{1}{2}x-1=0$ の交点は $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ であるから, 領域は下図の斜線部分で

ある。ただし境界線は含まない。



よって, ③が表す領域が x 軸, y 軸, 原点に関して対称であることから, 求める領域は下図の斜線部分となる。ただし境界線は含まない。



(答) 前図