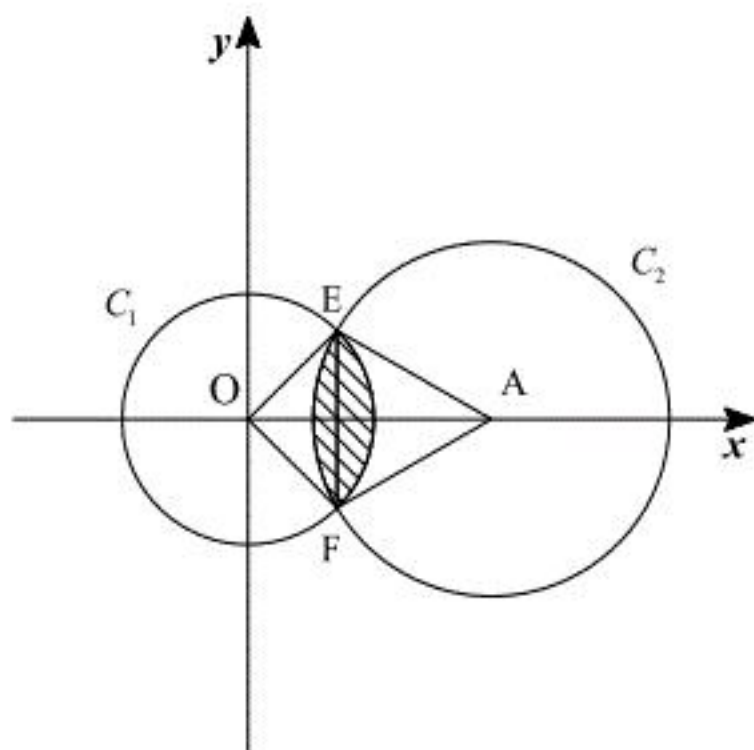


〔 I 〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
$(1+\sqrt{3}, 0)$	$(1, 1)$	$(1, -1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{\pi}{2}-1$	$\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$

〔解説〕



円 $C_1: x^2 + y^2 = 2$, $C_2: (x-1-\sqrt{3})^2 + y^2 = 4$ は上図のようになり，この2つの円で囲まれた図形は上図の斜線部分である。円 C_2 の式より，点Aの座標は $(1+\sqrt{3}, 0)$ である。ここで，

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (x-1-\sqrt{3})^2 + y^2 = 4 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (x-1-\sqrt{3})^2 + (2-x^2) = 4 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (-2-2\sqrt{3})x + 2 + 2\sqrt{3} = 0 \end{cases} \\ & \therefore x=1, y=\pm 1 \end{aligned}$$

となり，点Eの y 座標が正であるため， C_1 と C_2 の交点E, Fの座標はそれぞれ $(1, 1)$, $(1, -1)$ である。よって，三角形OEFは $OE=OF=\sqrt{2}$, $EF=2$ より $OE^2+OF^2=EF^2$ が成り立つため直角二等辺三角形であり， $\angle EOF = \frac{1}{2}\pi$ となる。また，三角形AEFは $AE=AF=EF=2$ より正三角

形であるため， $\angle EAF = \frac{1}{3}\pi$ となる。以上より，

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \\ S_2 &= \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥
$\frac{a^2+b^2-2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$

〔解説〕

$$\begin{aligned}
 & (\sin x + \cos y)^2 + (\cos x + \sin y)^2 \\
 &= (\sin^2 x + 2\sin x \cos y + \cos^2 y) + (\cos^2 x + 2\cos x \sin y + \sin^2 y) \\
 &= 2(\sin x \cos y + \cos x \sin y) + 2
 \end{aligned}$$

である。 $\sin x + \cos y = a$, $\cos x + \sin y = b$ であり、加法定理より、
 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ が成り立つため、

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 &= 2\sin(x+y) + 2 \\
 \therefore \sin(x+y) &= \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}
 \end{aligned}$$

となる。 $a = b = 0$ のとき、

$$\sin(x+y) = -1$$

$$\therefore x+y = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \quad (k \text{ は整数}) \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。 $0 \leq x < 2\pi$, $0 \leq y < 2\pi$ より $0 \leq x+y < 4\pi$ であるため、①を満たす $x+y$ は

$x+y = \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi$ である。また、 $a \neq 0$ または $b \neq 0$ のとき、

$$\begin{aligned}
 \cos^2 y + \sin^2 y &= (a - \sin x)^2 + (b - \cos x)^2 \\
 \Leftrightarrow 1 &= a^2 + b^2 - 2(a \sin x + b \cos x) + 1 \\
 \Leftrightarrow a \sin x + b \cos x &= \frac{a^2 + b^2}{2} \\
 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x+\theta) &= \frac{a^2 + b^2}{2} \left(\because \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \\
 \therefore \sin(x+\theta) &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \quad (\because \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0)
 \end{aligned}$$

となる。とくに、 $a = b = \frac{\sqrt{6}}{2}$ のとき、 $\sin \theta = \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ より $\theta = \frac{\pi}{4}$ としてよいので、

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。 $0 \leq x < 2\pi$ より $\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$ であるため、②を満たす $x + \frac{\pi}{4}$ は

$$\begin{aligned}
 x + \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi \\
 \therefore x &= \frac{1}{12}\pi, \frac{5}{12}\pi
 \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅲ〕

(1)

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 6x - 9 \\ &= 3(x-3)(x+1)\end{aligned}$$

より $f(x)$ の増減表は下表のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$

増減表より，関数 $y = f(x)$ は $x = -1$ のとき極大値

$$\begin{aligned}f(-1) &= (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) \\ &= 5\end{aligned}$$

をとり， $x = 3$ のとき極小値

$$\begin{aligned}f(3) &= 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 \\ &= -27\end{aligned}$$

をとる。

(答) 上表，極大値 5，極小値 -27

(2)

曲線 $y = f(x)$ の点 $(a+1, f(a+1))$ における接線の傾きは，

$$\begin{aligned}f'(a+1) &= 3(a+1)^2 - 6(a+1) - 9 \\ &= 3(a^2 + 2a + 1) - 6(a+1) - 9 \\ &= 3a^2 - 12\end{aligned}$$

である。曲線 $y = f(x)$ の点 $(a, f(a))$ における接線と点 $(a+1, f(a+1))$ における接線が平行で

あるとき，それぞれの接線の傾きが等しくなるため，

$$\begin{aligned}f'(a) &= f'(a+1) \\ \Leftrightarrow 3a^2 - 6a - 9 &= 3a^2 - 12 \\ \Leftrightarrow 6a &= 3 \\ \therefore a &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $a = \frac{1}{2}$

(3)

曲線 $y = f(x)$ の点 $(b, f(b))$ における接線 l と，曲線 $y = f(x)$ の点 $(t, f(t))$ における接線とが

平行になるための条件は

$$\begin{aligned}3b^2 - 6b + 9 &= 3t^2 - 6t + 9 \\ \Leftrightarrow 3b^2 - 6b - 3t^2 + 6t &= 0 \\ \Leftrightarrow 3(b-t)(b+t) - 6(b-t) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3(b-t)(b+t-2) &= 0 \\ \therefore t &= b, -b+2\end{aligned}$$

となる。この条件を満たす点 $(b, f(b))$ とは異なる点 $(t, f(t))$ が存在しないとき， $b = -b+2$ が

成り立つから，

$$\begin{aligned}b &= -b+2 \\ \therefore b &= 1\end{aligned}$$

となる。また，このときの接線 l の方程式は，

$$\begin{aligned}y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ \Leftrightarrow y &= (3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 9)(x-1) + (1^3 - 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1) \\ \Leftrightarrow y &= -12x + 1\end{aligned}$$

となる。

(答) $b = 1, y = -12x + 1$