

〔Ⅰ〕

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot (e^{-x^2} + a) + x \{e^{-x^2} \cdot (-2x)\} \\ &= (1 - 2x^2)e^{-x^2} + a \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} f''(x) &= -4x \cdot e^{-x^2} + (1 - 2x^2) \{e^{-x^2} \cdot (-2x)\} \\ &= 2x(2x^2 - 3)e^{-x^2} \end{aligned}$$

であるから

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

である。これらの x の前後で $f''(x)$ の符号が変化するから、変曲点の座標は

$$(0, 0), \left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \left(e^{-\frac{3}{2}} + a \right) \right) \text{ (複号同順) である。これらがすべて } x \text{ 軸上にあるから}$$

$$\pm\sqrt{\frac{3}{2}} \left(e^{-\frac{3}{2}} + a \right) = 0 \Leftrightarrow a = -e^{-\frac{3}{2}}$$

となる。

$$\text{(答) } a = -e^{-\frac{3}{2}}$$

(2)

$y = f(x)$ の連続性より、 $x = c$ (c は定数) の形の漸近線を持たない。よって、漸近線は実数 p, q を用いて $y = px + q$ とおける。ここで、 $x \rightarrow \pm\infty$ のとき $x^2 \rightarrow \infty$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x e^{-x^2} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 e^{-x^2}}{x} \\ &= 0 \left(\because \lim_{x^2 \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2} = 0, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \right) \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \{f(x) - (px + q)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \{x e^{-x^2} + (a - p)x - q\} &= 0 \\ \Leftrightarrow p = a \text{ かつ } q = 0 \left(\because \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x e^{-x^2} = 0 \right) \end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \{f(x) - (px + q)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \{x e^{-x^2} + (a - p)x - q\} &= 0 \\ \Leftrightarrow p = a \text{ かつ } q = 0 \left(\because \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x^2} = 0 \right) \end{aligned}$$

である。以上より、 $y = px + q$ が漸近線となるのは $p = a$ かつ $q = 0$ のときであるから、求める

漸近線は(1)より $y = -e^{-\frac{3}{2}}x$ である。

$$\text{(答) } y = -e^{-\frac{3}{2}}x$$

(3)

$$f(-x) = -x(e^{-x^2} + a) = -f(x)$$

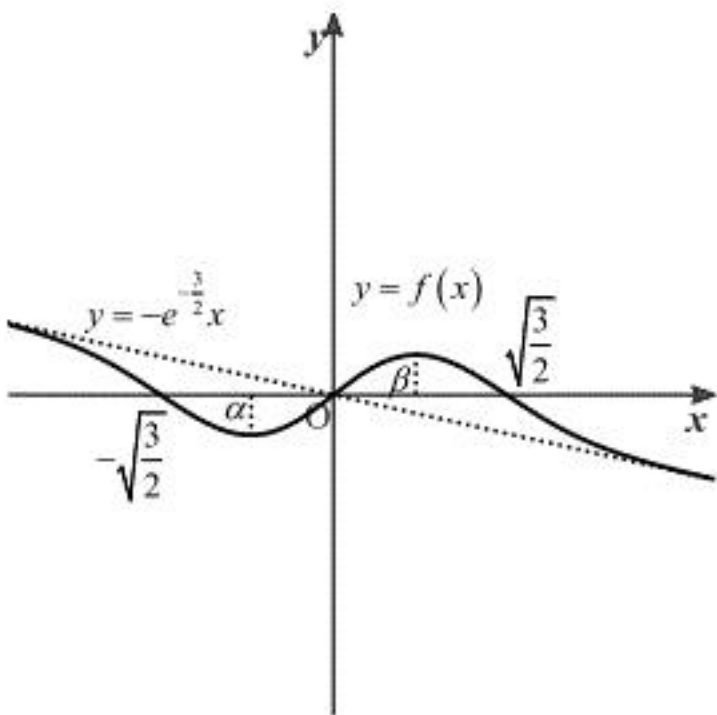
より、 $f(x)$ は奇関数であるから、 $x \geq 0$ で増減を調べればよい。 $0 < e^{-\frac{3}{2}} < 1$ より、

$$\begin{aligned} f'(0) &= 1 - e^{-\frac{3}{2}} > 0 \\ f'\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) &= -3e^{-\frac{3}{2}} < 0 \end{aligned}$$

である。 $x \geq 0$ において $f'(x) = 0$ となる x は $x = \beta$ のみであり、また $f'(x)$ は連続であるから、 $x \geq 0$ での $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	β	...	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	...
$f'(x)$	+	+	0	-	-	-
$f(x)$	0	↗		↘	0	↘

また、 $x > 0$ のとき $f(x) - ax = x e^{-x^2} > 0$ より、曲線 $y = f(x)$ は漸近線 $y = ax$ の上側にある。ゆえに、曲線 $y = f(x)$ の概形は下図の実線となり、(2)で求めた漸近線は下図の点線となる。



(答) 前図

(4)

$f(x)$ が奇関数であることに注意して

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\sqrt{\frac{5}{2}}} f(x) dx \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{\frac{5}{2}}} x(e^{-x^2} + a) dx \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{\frac{5}{2}}} \frac{(-x^2)'}{-2} e^{-x^2} dx + [ax^2]_0^{\sqrt{\frac{5}{2}}} \\ &= -[e^{-x^2}]_0^{\sqrt{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{2}a \\ &= 1 - e^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \left(-e^{-\frac{3}{2}} \right) \\ &= 1 - \frac{5}{2} e^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答) } S = 1 - \frac{5}{2} e^{-\frac{3}{2}}$$

〔Ⅱ〕

〔解答〕

①	3
②	$m+2$
③	a_m+m+2
④	$\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$
⑤	$\frac{1}{2}(n-k+1)(n-k+2)$
⑥	$\frac{1}{6}(n+2)(n+3)$
⑦	$\frac{1}{2}$

〔解説〕

①

$x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ に含まれる格子点は $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ の3つであるから
 $a_1=3$
 である。

②

$x+y=m+1, x \geq 0, y \geq 0$ に含まれる格子点は $(0, m+1), (1, m), \cdots, (m+1, 0)$ の $m+2$ 個である。

③

$a_{m+1}=a_m+(x+y=m+1, x \geq 0, y \geq 0$ に含まれる格子点の個数)
 であるから、②より
 $a_{m+1}=a_m+m+2$
 となる。

④

②より $m \geq 2$ では

$$\begin{aligned} a_m &= a_1 + \sum_{k=1}^{m-1} (k+2) \\ &= 3 + \frac{(1+2)+(m-1+2)}{2} \cdot (m-1) \\ &= \frac{1}{2}(m+1)(m+2) \end{aligned}$$

であり、これは $m=1$ でも成立するから、すべての自然数 m に対して

$$a_m = \frac{1}{2}(m+1)(m+2)$$

である。

⑤

求めるものは、 $x+y \leq n-k, x \geq 0, y \geq 0$ に含まれる格子点の個数であるから

$$a_{n-k} = \frac{1}{2}(n-k+1)(n-k+2)$$

である。

⑥

⑤より、

$$b_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2}(n-k+1)(n-k+2)$$

である。 $n-k+1=l$ とおくと、 $k=0, 1, \cdots, n$ のとき $l=n+1, n, \cdots, 1$ であるから、

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n+1} l(l+1) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n+1} (l^2 + l) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) + \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \right\} \\ &= (n+1) \cdot \frac{1}{6}(n+2)(n+3) \end{aligned}$$

となる。

⑦

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_n} &= \frac{6}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= 3 \left\{ \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right\} \end{aligned}$$

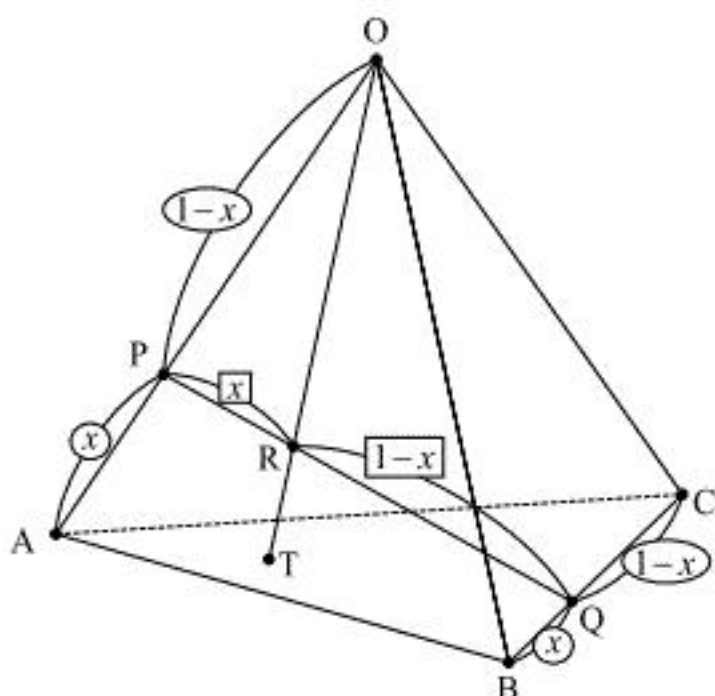
に注意すると

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{b_n} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N 3 \left\{ \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} 3 \left[\left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \left(\frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} \right) + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{1}{N(N+1)} - \frac{1}{(N+1)(N+2)} \right\} + \left\{ \frac{1}{(N+1)(N+2)} - \frac{1}{(N+2)(N+3)} \right\} \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} 3 \left\{ \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{(N+2)(N+3)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅲ〕

(1)



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= (1-x)\overrightarrow{OP} + x\overrightarrow{OQ} \\ &= (1-x)\{(1-x)\vec{a}\} + x\{(1-x)\vec{b} + x\vec{c}\} \\ &= (1-x)^2\vec{a} + x(1-x)\vec{b} + x^2\vec{c}\end{aligned}$$

である。

(答) $(1-x)^2\vec{a} + x(1-x)\vec{b} + x^2\vec{c}$

(2)

S が底面 ABC 上にあるとき、実数 α, β を用いて

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \quad \cdots \textcircled{1}$$

とあらわせる。一方

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS} &= s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c} \\ &= (s+t+u)\vec{a} + t(\vec{b}-\vec{a}) + u(\vec{c}-\vec{a}) \\ &= (s+t+u)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

ともあらわせる。 $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AO}$ より、 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ は一次独立であるから、 $\textcircled{1}$ と係数を比較して

$$s+t+u=1$$

となる。

(証明終わり)

(3)

(1)より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} &= k\overrightarrow{OR} \\ &= k(1-x)^2\vec{a} + kx(1-x)\vec{b} + kx^2\vec{c}\end{aligned}$$

である。さらに T は底面 ABC 上にあるから、(2)より

$$\begin{aligned}k(1-x)^2 + kx(1-x) + kx^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow k(x^2 - x + 1) &= 1\end{aligned}$$

である。 $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ であるから

$$k = \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

となる。 $0 < x < 1$ の範囲で、 $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ が最小になるのは $x = \frac{1}{2}$ のときで、その最

小値は $\frac{3}{4}$ である。ゆえに、 k の最大値は

$$\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

である。

(答) $k = \frac{1}{x^2 - x + 1}$ ，最大値： $\frac{4}{3}$

〔Ⅳ〕

〔解答〕

(1)	①
	-1, 3
(2)	②
	$-\frac{\pi}{2}$
(3)	③
	$-\frac{1}{3}$
(4)	④
	$\frac{7}{54}$
(5)	⑤
	3

〔解説〕

(1)

点Cの座標を(1, 3)とする。Cが線分ABの垂直二等分線上にあるための必要十分条件は

$$\begin{aligned} AC^2 &= BC^2 \\ \Leftrightarrow (2-1)^2 + (1-3)^2 &= (a-1)^2 + (2-3)^2 \\ \Leftrightarrow a^2 - 2a - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a+1)(a-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= -1, 3 \end{aligned}$$

である。

(2)

$\sin \theta = 0$ のとき与式は成立しないから、 $\theta \neq 0 \left(\because -\pi < \theta < \pi \right)$ である。ここで、2倍角の公式と半角の公式を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} &= -1 \\ \Leftrightarrow \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} &= -1 \\ \Leftrightarrow \tan \frac{\theta}{2} &= -1 \left(\because -\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < 0, 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} &= -\frac{\pi}{4} \left(\because -\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < 0, 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \right) \\ \Leftrightarrow \theta &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

となる。

(3)

与式より

$$\begin{aligned} r + 2r \sin \theta &= 3 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + 2y &= 3 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} &= 3 - 2y \end{aligned}$$

となるから、両辺を2乗して整理すると

$$-\frac{1}{3}x^2 + (y-2)^2 = 1$$

となる。

(4)

出た目の積が8となる目の組み合わせは $(-2, -2, 2), (1, 2, 4), (2, 2, 2)$ の3通りである。目をすべて区別して考えると、全事象は 6^3 通りでありこれらは同様に確からしい。 $(-2, -2, 2)$ の組になる場合の数は ${}_3C_1 = 3$ (通り)であり、 $(1, 2, 4)$ の組は $2 \cdot 2 \cdot 3! = 24$ (通り)であり、 $(2, 2, 2)$ の組は1通りである。よって求める確率は

$$\frac{3+24+1}{6^3} = \frac{7}{54}$$

である。

(5)

$9^n + 55$ が平方数のとき、自然数 m を用いて

$$9^n + 55 = m^2$$

とあらわすことができる。これを変形すると

$$(m-3^n)(m+3^n) = 55$$

となる。 $m-3^n < m+3^n$ 、 $m+3^n > 0$ であり、 $m+3^n, m-3^n$ は整数であるから

$$\begin{aligned} (m-3^n, m+3^n) &= (1, 55), (5, 11) \\ \Leftrightarrow (m, 3^n) &= (28, 27), (8, 3) \\ \Leftrightarrow (m, n) &= (28, 3), (8, 1) \end{aligned}$$

となる。よって $n = 1, 3$ であり、最大の n は3である。