

[1]

(1)

$$g(x) = \frac{4 - \left(-\frac{1}{2}\right)}{2 - (-1)}(x - 2) + 4$$

$$= \frac{3}{2}x + 1 \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2)

$$g(x) - f(x) = \left(\frac{3}{2}x + 1\right) - \frac{1}{2}x^3$$

$$= -\frac{1}{2}(x^3 - 3x - 2)$$

$$= -\frac{1}{2}(x + 1)(x^2 - x - 2)$$

$$= -\frac{1}{2}(x + 1)^2(x - 2) \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

より, $-1 \leq x \leq 2$ において,

$$g(x) \geq f(x) \quad \dots\dots(\text{証明終り})$$

(3) 「交点」は接点を含まない共有点であると解釈する.

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2$$

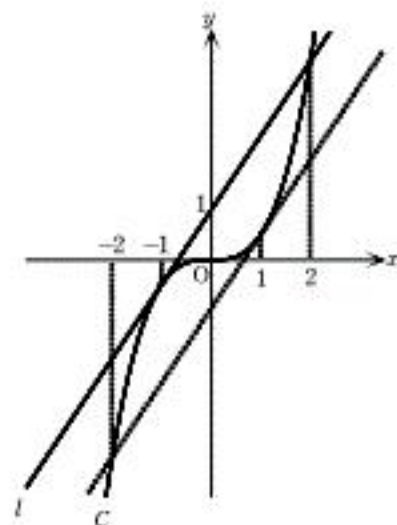
x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

より, $f(x)$ の増減は右のようになる.

これと①より, C と l は右図のようになる.

よって, 対称性に注意すると, 求める交点の数は

$$\begin{cases} k \leq -1, 1 \leq k & \text{のとき} 1 \text{ 個} \\ -1 < k < 1 & \text{のとき} 3 \text{ 個} \end{cases} \quad \dots\dots(\text{答})$$



[Ⅱ]

(1) $a_n = a_1 + (n-1)d$ より,

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2a_1 + (n-1)d\} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2}n\{a_1 + nd + a_1 + (2n-1)d\} \\ &= \frac{1}{2}n\{2a_1 + (3n-1)d\} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $T_n = 2S_n + n^2$ より,

$$\frac{1}{2}n\{2a_1 + (3n-1)d\} = 2 \cdot \frac{1}{2}n\{2a_1 + (n-1)d\} + n^2$$

$$n\{(d-2)n + (d-2a_1)\} = 0$$

$$d-2=0 \quad \text{かつ} \quad d-2a_1=0$$

よって,

$$a_1 = 1, d = 2 \quad \dots\dots(\text{答})$$

また, このとき,

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + (n-1) \cdot 2 \\ &= 2n-1 \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(3) $\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$ より,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) - \left(\frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{4n+2} > 0$$

よって, すべての自然数 n について

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} < \frac{1}{2}$$

が成り立つ.

$\dots\dots(\text{証明終り})$

〔Ⅲ〕

(1)	①	$\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{a} + 4\overrightarrow{b}$
(2)	②	$\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$
(3)	③	13
(4)	④	$\overrightarrow{OE} = -\frac{4\sqrt{61}}{61}(3\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b})$
	⑤	$\overrightarrow{OF} = \frac{4\sqrt{61}}{61}(3\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b})$

〔Ⅳ〕

(1)	①	$\frac{1}{12}$
(2)	②	$\frac{8}{9}$
(3)	③	$\frac{11}{36}$
(4)	④	1
(5)	⑤	$\frac{5}{12}$