

2019 年度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)〈シャープペンシルは、HB 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線から切り離してください。
4. 試験時間は 90 分です。
5. 問題は 4 ページで大問 4 問です。余白は計算用紙です。
6. 解答用紙は両面になっています。

〔 I 〕 放物線 $C: y = x^2$ および C 上の点 $P(a, a^2)$ を考える。次の問いに答えよ。

- (1) 点 P を通る傾き m ($m \neq 2a$) の直線を l とし、直線 l と放物線 C の P とは異なる交点を $Q(b, b^2)$ とする。 b を m と a を用いて表せ。またこのとき、直線 l と放物線 C とで囲まれる部分の面積 S が $\frac{1}{6}|b - a|^3$ であることを積分を計算し示せ。
- (2) 点 P を通り傾きが $\sqrt{3}$ である直線 l_1 と放物線 C で囲まれる部分の面積を S_1 、点 P を通り傾きが $\frac{1}{\sqrt{3}}$ である直線 l_2 と放物線 C で囲まれる部分の面積を S_2 とする。 $S_1 : S_2 = 8 : 1$ であるときの a の値を求めよ。

〔Ⅱ〕 三角形 ABC の 3 つの内角を A, B, C とする。次の問いに答えよ。

- (1) $A = \frac{\pi}{3}$ のとき, $\sin B \sin C$ の値の範囲を求めよ。
- (2) A が一定のとき, $\sin B + \sin C$ の値の範囲を A を用いて表せ。
- (3) A が一定のとき, $\sin B \sin C$ の値の範囲を A を用いて表せ。

〔Ⅲ〕 直線 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 上に点 $A_1\left(1, \frac{5}{2}\right)$, $A_2(2, 3)$, $\dots$, $A_n\left(n, \frac{1}{2}n + 2\right)$ があり, 直線 $y = ax$ 上に点 $B_1(1, a)$, $B_2(2, 2a)$, $\dots$, $B_n(n, na)$ がある。ただし, a は実数とし, 線分 A_iB_i の長さを d_i とする。

次の をうめよ。

(1) $d_1^2 + d_2^2$ を a を用いて表すと ① である。また, これが最小となる a の値は ② である。

(2) d_k^2 を a と k を用いて表すと ③ である。

(3) $d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2 =$ ④ $a^2 +$ ⑤ $a +$ ⑥ である。

また, この値が最小となる a を n を用いて表すと ⑦ である。

〔Ⅳ〕 座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則に従って点 P が移動するゲームを考える。最初 P は $(0, 0)$ にあるものとする。次の をうめよ。

(1) 正六面体のさいころの各面に 1 から 6 の数字が 1 つずつ書かれている。点 P が格子点 (m, n) にあるとき、このさいころを振って 1 または 2 が出れば P は $(m + 1, n + 1)$ に移動し、3 または 4 が出れば $(m + 1, n)$ に移動し、5 または 6 が出れば $(m + 1, n - 1)$ へ移動する。 P が $(3, 1)$ に到達するさいころの目の出方は ① 通りであり、 $(4, 0)$ に到達する場合は ② 通りである。

(2) 正八面体のさいころの各面に 1 から 8 の数字が 1 つずつ書かれている。点 P が格子点 (m, n) にあるとき、このさいころを振って 1 または 2 が出れば P は $(m + 1, n + 1)$ に移動し、7 または 8 が出れば $(m + 1, n - 1)$ に移動し、それ以外のときは $(m + 1, n)$ へ移動する。 P が $(3, 1)$ に到達するさいころの目の出方は ③ 通りであり、 $(4, 1)$ に到達する場合は ④ 通り、 $(4, -1)$ に到達する場合は ⑤ 通りである。任意の自然数 n に対して、格子点 $(n, n - 1)$, $(n, 0)$, $(n, -n - 1)$ のうち到達できない格子点は ⑥ である。

(以上)

