2019年度入学試験問題

数　　学

注　意　事　項

1．試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。

2．解答はすべて黒鉛筆（ＨＢ）〈シャープペンシルは，ＨＢ 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。

3．解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し，切取線から切り離してください。

4．試験時間は100分です。

5．問題は4ページで大問4問です。余白は計算用紙です。

6．解答用紙は両面になっています。

〔 I 〕 関数 $f(x)=\dfrac{e^x}{\sin x}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $0<x<2\pi$ において，$f(x)$ の極値を求めよ。

(3) $2\pi<x$ において，$f(x)$ の極小値を小さい方から順に並べたものを $a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_k,\ \cdots\cdots\ (k \geqq 1)$ とする。a_k を求めよ。ただし a_k の求め方を述べる必要はない。a_k の値のみを答えよ。

(4) (3) で求めた $a_k\ (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n,\ \cdots\cdots)$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1)^{\frac{1}{n}}+(a_2)^{\frac{1}{n}}+\cdots\cdots+(a_n)^{\frac{1}{n}}}{n}$$

の値を求めよ。

〔Ⅱ〕 虚数単位を i で表した複素数平面上の図形について，次の $\boxed{}$ をうめよ。

原点を O(0)とする複素数平面上に 2 点 A(2)，B(z)を考える。ここで点 B は原点 O と点 A と異なる点とし，

$$w = \frac{(\sqrt{3}+i)z}{2(z-2)}$$

を定義する。$w=\sqrt{3}$ のとき，$z=$ $\boxed{①}$ $+$ $\boxed{②}$ i である。$\boxed{①}$，$\boxed{②}$ は実数値で答えよ。また，この z に対して，$\angle\mathrm{OBA} =$ $\boxed{③}$ である。ただし $\boxed{③}$ は弧度法で答えよ。

w が実数値をとるような z がどのような図形の上にあるかを考える。$w=\overline{w}$ を整理して z のみの式にすると

$$|z-(\boxed{④})| = \boxed{⑤} \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

となるので，点 z は中心が複素数 $\boxed{④}$ で表され，半径 $\boxed{⑤}$ の円周上にあることがわかる。この円を C とする。次の式

$$(1+2i)z+(1-2i)\overline{z} = 2-4\sqrt{3}$$

をみたす点 z の表す図形 L と円 C との共有点を調べる。複素数 α に対して

$$\beta = (1+2i)\alpha$$

とおく。α が図形 L と円 C との共有点になるとする。α は図形 L 上の点だから，β の実部は $\boxed{⑥}$ である。さらに α は $(*)$ の式を満たすので，点 β は中心を表す複素数が $1-2\sqrt{3}+(\boxed{⑦})i$ であって，半径が $\boxed{⑧}$ である円周上にある。このことから

$$\beta = \boxed{⑥} + (2+\sqrt{3} \pm \boxed{⑨})i$$

と求まる。

〔Ⅲ〕 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = {a_n}^2 + 2a_n\,(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。次の問いに答えよ。ただし，答えはすべて 10 進法で答えよ。

(1) $b_n = a_n + 1$ とおく。b_{n+1} を b_n で表し，b_n を n を用いて表せ。

(2) b_n を 2 進法で表したときの桁数を求めよ。

(3) a_n を 2 進法で表した数の各位の数の和を求めよ。

(4) $c_n = b_1 b_2 \cdots\cdots b_n$ とおく。c_n を n を用いて表し，${a_n}^2$ を整数 $\sqrt{2c_n}$ で割ったときの商と余りを求めよ。

〔Ⅳ〕 次の $\boxed{}$ をうめよ。

(1) 関数 $f(\theta)=\sin 2\theta-\sqrt{3}\cos 2\theta\left(\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{7}{12}\pi\right)$ の最大値は $\boxed{①}$ で，最小値は $\boxed{②}$ である。

(2) さいころを2回続けて投げ，出る目を順に a，b とする。a，b，6が三角形の3辺の長さになる確率は $\boxed{③}$ である。また a，b，6が三角形の3辺の長さになるとき，その三角形が二等辺三角形である条件付き確率は $\boxed{④}$ である。

(3) xy 座標平面上において，直線 $y=x$ に関して，曲線 $y=\frac{2}{x+1}$ と対称な曲線を C_1 とし，直線 $y=-1$ に関して，曲線 $y=\frac{2}{x+1}$ と対称な曲線を C_2 とする。曲線 C_2 の漸近線と曲線 C_1 との交点の座標をすべて求めると，$\boxed{⑤}$ である。

(4) $3x+5y=7$ を満たす整数 x，y で，$100\leqq x+y\leqq 200$ となる $(x,\ y)$ の個数は $\boxed{⑥}$ 個である。

(5) 実数 x，y，z が $x^2+y^2+z^2=18$ を満たしながら変化するとき，$2x+y+2z$ が最小値をとるのは，$(x,\ y,\ z)=$ $\boxed{⑦}$ のときである。

（以上）