2019 年 度 入 学 試 験 問 題

数　　学

注　意　事　項

1．試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。

2．解答はすべて黒鉛筆（ＨＢ）〈シャープペンシルは，ＨＢ 0.5 mm 以上の芯であれば使用可〉で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。

3．解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し，切取線から切り離してください。

4．試験時間は 60 分です。

5．問題は 3 ページで大問 3 問です。余白は計算用紙です。

〔Ⅰ〕 pを素数とする。次の問いに答えよ。

(1) 分母がpである既約分数で，0より大きく1より小さいものの個数を求めよ。

(2) kを自然数とする。分母がpである既約分数で，$k-1$より大きくkより小さいものの和S_kを求めよ。

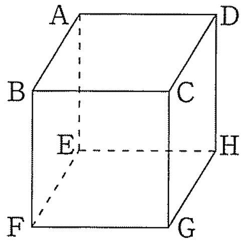
(3) nを自然数とし，S_kを(2)で求めたものとする。和$\sum_{k=1}^{n} S_k$を求めよ。

〔Ⅱ〕 次の $\boxed{}$ をうめよ。ただし，$\boxed{①}$ ～ $\boxed{③}$ は t の式で，$\boxed{④}$ ～ $\boxed{⑥}$ は数値でうめよ。

$t>1$ とし，原点Oを中心とする半径1の円を C とおく。点A $(t,\ 0)$ と点K $(0,\ 1)$ を通る直線と C との交点のうち，Kと異なる点をPとおくと，Pの x 座標は $\boxed{①}$ であり，y 座標は $\boxed{②}$ である。さらに，Aと点M $(0,\ -1)$ を通る直線と C との交点のうち，Mと異なる点をQとおくと，線分PQの長さは $\boxed{③}$ である。

$t>1$ より，$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす θ を用いて，$t=\tan\theta$ と表すことができる。このとき，△OPQの面積を S とおくと，$S=\boxed{④}\sin 4\theta$ である。よって，$\theta=\boxed{⑤}\pi$ のとき，S は最大値 $\boxed{⑥}$ をとる。

〔Ⅲ〕 次の $\boxed{}$ をうめよ。



空間内に1辺の長さが1の立方体ABCD−EFGHがある。p, q, rを$0<p<1$, $0<q<1$, $0<r<1$を満たす実数とし，辺ABを$p:(1-p)$に内分する点をP，辺CGを$q:(1-q)$に内分する点をQ，辺HEを$r:(1-r)$に内分する点をRとする。このとき，ベクトル$\overrightarrow{PQ}$は，ベクトル$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CG}$とp, qを用いて，

$$\overrightarrow{PQ}=(\boxed{①})\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\boxed{②}\,\overrightarrow{CG}$$

と表される。同様にベクトル$\overrightarrow{RP}$は，ベクトル$\overrightarrow{HE}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{AB}$とp, rを用いて，

$$\overrightarrow{RP}=(\boxed{③})\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{EA}+\boxed{④}\,\overrightarrow{AB}$$

と表される。したがって，内積$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$を$p$, q, rを用いて表すと $\boxed{⑤}$ である。また，ベクトルの大きさ$|\overrightarrow{PQ}|$をp, qを用いて表すと，$\boxed{⑥}$ である。よって，$p=q=r$のとき，△PQRの面積をpを用いて表すと $\boxed{⑦}$ であり，その最小値は $\boxed{⑧}$ である。

（以上）